¿Una relación pitagórica es igual al teorema de Pitágoras?

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

NUMÉRICO - VARIACIONAL

CONCEPTOS CLAVE

ZONA DE JUEGO:

Relaciona con una línea los términos (Conceptos claves) con la imagen según corresponda.

Igualdad:

Enunciado en el que dos expresiones (iguales o distintas) denotan el mismo objeto.

Razón trigonométrica :

Es la comparación de las longitudes de cada uno de los lados del triángulo.

Función trigonométrica :

Son las funciones establecidas con el fin de extender la definición de las razones trigonométricas a todos los números reales.

Seno :

Relación entre el cateto opuesto y la hipotenusa de un triángulo.

sen

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

sen a

$sen\theta \cdot Csc\,\theta = 1$

En este espacio responde la pregunta que se encuentra en la parte superior.

Mapa Conceptual

Completa el siguiente mapa conceptual con los términos que encontrarás a continuación:

- Demostraciones de identidades
- sen + cos = 1
- Identidades Pitagóricas

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Demostración de identidades

Identidades para la suma y diferencia de ángulos

Son

Identidad para ángulos dobles y medios

Son

Igualdades con expresiones trigonométricas para cualquier valor de ángulo

Fundamentales

¿?

Identidades Trigonométricas

Son

¿?

Transformar uno de los miembros de la otra igualdad hasta encontrar el otro

Expresiones trigonométricas de una función

En función sen

¿?

Comenzando con el fin en mente

¿Ya sabes lo que aprenderás en esta unidad académica?

Si aún no tienes claridad pregúntale a tu profesor.

Identidades Trigonométricas

UNIDAD PRODUCTIVA DE APRENDIZAJE N° 1

Las identidades trigonométricas son igualdades que involucran funciones trigonométricas. Estas identidades son siempre útiles para cuando necesitamos simplificar expresiones que tienen incluidas funciones trigonométricas, cualesquiera que sean los valores que se asignen a los ángulos para los cuales están definidas estas razones.

Dichas identidades trigonométricas son reglas que permiten manejar las funciones trigonométricas.

El objetivo de esta unidad es expresarlas y aprender a utilizarlas, mas no demostrarlas. No se incluyen todas las identidades trigonométricas.

Para que una igualdad trigonométrica quede demostrada se debe llegar a: 1° una identidad, es decir, a algo igual a sí mismo; o bien 2 a una cualquiera de las fórmulas trigonométricas.

El Teorema de Pitágoras establece que "la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa", esto es:

Esta relación entre los 3 lados de un triángulo se puede expresar utilizando funciones trigonométricas. Por ejemplo, se puede dividir ambos lados de la igualdad entre de forma tal que:

$$co^2 + ca^2 = hip^2$$

$$\frac{co^2 + ca^2}{hip^2} = \frac{hip^2}{hip^2}$$

$$\frac{co^2}{hip^2} + \frac{ca^2}{hip^2} = 1$$

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

Es importante destacar aquí que $sen^2 x = (senx)^2 \neq senx^2$ ya que en la última expresión el cuadrado es únicamente del argumento y no de la función completa.

Así como se decidió dividir cada lado de la igualdad entre hip^2, se pudo haber dividido entre ca^2 o bien co^2. El resultado es que el Teorema de Pitágoras se puede expresar de tres diferentes maneras utilizando funciones trigonométricas.

El Teorema de Pitágoras establece que:

$$co^2 + ca^2 = hip^2$$

que se puede expresar como

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$
$$1 + cot^2 x = csc^2 x$$
$$tan^2 x + 1 = sec^2 x$$

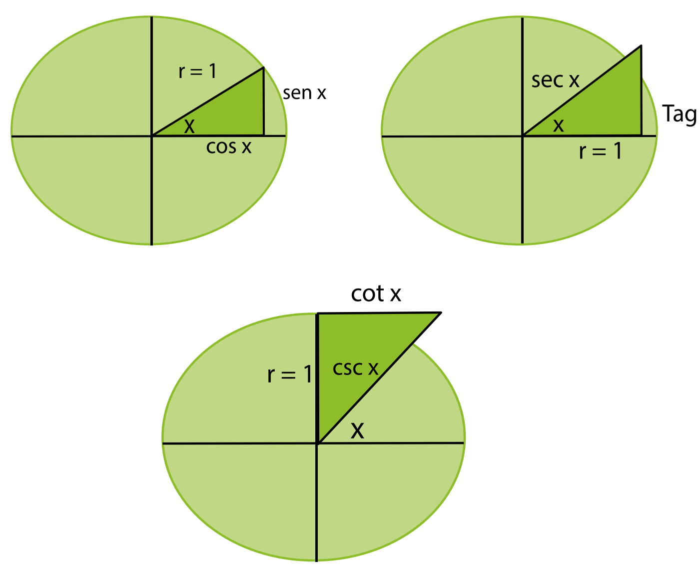
Otras relaciones importantes, se mencionaron en un texto anterior; se resumen y se amplían a continuación.

$$\tan x = \frac{senx}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{senx} = \frac{1}{\tan x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\csc x = \frac{1}{senx}$$

Identidades Pitagóricas

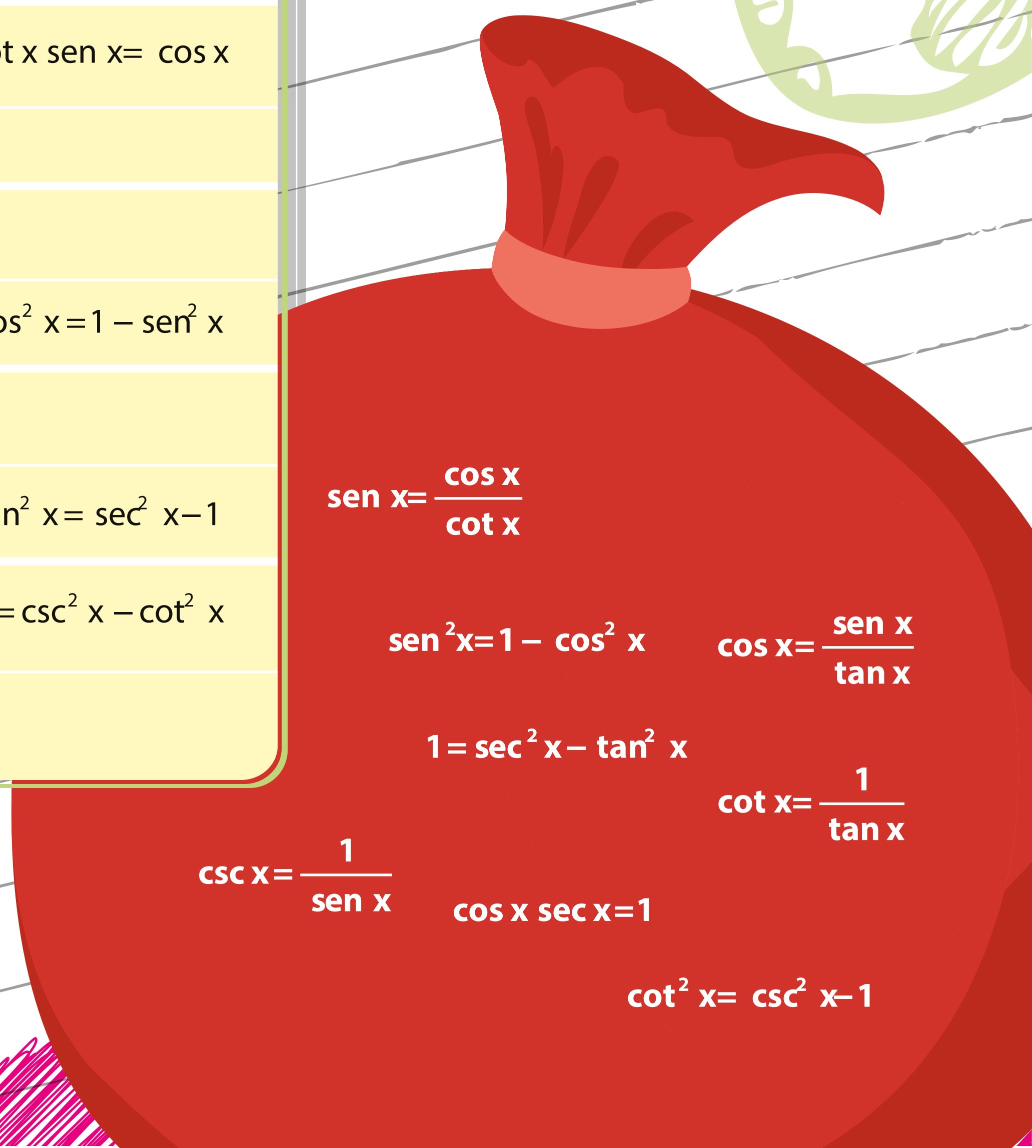
Para deducir estas identidades, se debe tener en cuenta el círculo trigonométrico cuyo radio es igual a la unidad; las líneas trigonométricas y el Teorema de Pitágoras:

$$\left(c^2 = a^2 + b^2\right)$$



Fórmula	Los 2 despejes respectivos
$\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{\csc x}$	$\operatorname{sen} x \csc x = 1$
$\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$	
	$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
$\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$	$\tan x \cot x = 1$
$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\tan x \cos x = \operatorname{sen} x$
$\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	$\cot x \operatorname{sen} x = \cos x$
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	
	$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$
$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	
	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$	$1 = \csc^2 x - \cot^2 x$

En el siguiente cuadro aparecen los despejes respectivos de algunas de las fórmulas trigonométricas. Cada una de las fórmulas tiene 2 despejes respectivamente. Pero algunas de ellas han caído en la bolsa y se han mezclado. Completa la tabla indicando cuál de estos despejes pertence a alguna fórmula.



Por Pitágoras en cada una de las figuras podemos obtener:

1. $\text{Sen}^2\ x + \cos^2 x = 1$
2. $\text{Sec}^2\ x = 1 + \text{tag}^2 x$
3. $\text{Csc}^2\ x = 1 + \cot^2 x$

Identidades de sumas y restas de ángulos

$$\text{sen}\ (a \pm b) = \text{sena}\cos b \pm \cos \text{asenb}$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{enasenb}$$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

Ejemplo: Utilizar las identidades de sumas y restas de ángulos para encontrar otra expresión para $\text{sen}(x + \pi)$

Se utiliza la suma de ángulos para la función seno y se obtiene

$$\text{sen}(x + \pi) = \text{senxsen}\pi + \cos x \cos \pi$$

El $\text{sen}\,\pi = 0$ y $\cos \pi = -1$, entonces, $\text{sen}(x + \pi) = -\cos x$.

Simetría

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

Identidades de valor múltiple

$$\text{sen } 2a = 2\,\text{sen } a \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a - 1 - 2\,\text{sen}^2 a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$
$$\text{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$
$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$
$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

Identidades para el producto de senos y cosenos

$$\text{sen } a \cos b = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b)\right]$$
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a + b) + \cos(a - b)\right]$$
$$\text{sen } a\ \text{sen } b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right]$$

Actividad

actividad extra-clase ○ actividad en clase ○

Desarrolla estos ejercicios en las hojas de notas.

Demostrar las siguientes identidades.

1) $\cos\alpha\ \ \text{tg}\alpha = \text{sen}\,\alpha$

2) $\text{sen}\,\alpha\ \sec\alpha = \text{tg}\alpha$

3) $\text{sen}\,\alpha\ \text{cotg}\alpha = \cos\alpha$

4) $\text{sen}\,\alpha\ \text{tg}\alpha + \cos\alpha = \sec\alpha$

5) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \text{cosec}\ \alpha - \text{cotg}\alpha$

6) $(\text{sen}\ \alpha + \cos\ \alpha)^2 + (\text{sen}\ \alpha - \cos\ \alpha)^2 = 2$

7) $(\text{sen}\ \alpha + \text{cosec}\ \alpha)^2 = \text{sen}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha + 3$

8) $\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{1+\cos\ \alpha} + \dfrac{1+\cos\ \alpha}{\text{sen}\ \alpha} = 2\cos\text{ec}\,\alpha$

9) $\dfrac{\cos\text{ec}\,\alpha}{\cot\text{g}\alpha + \text{tg}\alpha} = \cos\ \alpha$

10) $\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha$

11) $\sec^4\alpha - \sec^2\alpha = \text{tg}^4\alpha - \text{tg}^2\alpha$

12) $\sqrt{\dfrac{\text{tg}^2\ \alpha}{1+\text{tg}^2\ \alpha}} = \text{sen}\,\alpha$

13) $\text{cotg}^4\alpha + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^4\alpha + \text{cosec}^2\alpha$

14) $(1+\text{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = 1$

15) $\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\alpha\ \text{tg}^2\alpha = \text{tg}^2\alpha$

16) $\sec^2\alpha + \text{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha\ \ \text{cosec}^2\alpha$

17) $\text{tg}\alpha + \text{cotg}\,\alpha = \sec\ \alpha\ \text{cosec}\ \alpha$

Identidades trigonométricas de mitad de ángulo

$$\text{Tag } x = \frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x} \qquad \text{Cot } x = \frac{\text{Sen} x}{\text{Cos } x}$$

Identidades recíprocas

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \qquad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen } \alpha$$

$$\text{Cot } x = \frac{1}{\text{Tag } x}$$

$$\text{Sec } x = \frac{1}{\text{Cos } x}$$

$$\text{Csc } x = \frac{1}{\text{Sen } x}$$

Funciones pares e impares

$$\text{Sen}(-x) = -\text{Sen } x$$

$$\text{Cos}(-x) = -\text{Cos } x$$

PASOS PARA DEMOSTRAR IDENTIDADES

1º. Se debe partir del lado más complejo y transformarse en el lado más sencillo.
2º. Sustituir las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante en función de seno y coseno.
3º. Realizar las operaciones algebraicas.
4º. Tienen como objetivo, el otro lado de la identidad, para hacer las sustituciones necesarias para llegar a este lado.

Ejemplos:

Verificar las siguientes identidades.

1. $\text{Cot } x \times \text{Sec } x \times \text{Sen } x = 1$

Solución:

$$\text{Cot } x \times \text{Sec } x \times \text{Sen } x = \left(\frac{\cos x}{\text{sen } x}\right)\left(\frac{1}{\csc x}\right)(\text{sen } x)$$

$$= \text{Sen } x$$

2. $\text{Csc } x - \text{Sen } x = \text{Cot } x \times \text{Csc } x$

Solución: $\text{Csc } x - \text{Sen } x = \frac{1}{\text{Sen } x} - \text{Sen } x$

$$= \frac{1 - \text{Sen}^2 x}{\text{Sen } x}$$

$$= \frac{\text{Cos}^2 x}{\text{Sen } x}$$

$$= \left(\frac{\text{Csc } x}{\text{Sen } x}\right)(\text{Cos } x)$$

$$= \text{Cot } x \times \text{Cos } x$$

3. $\tan(-x) = -\tan x$

Solución: $\tan(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{\cos(-x)}$

$$= \frac{-\text{senx}}{\cos x} = -\text{tagx}$$

4. $\frac{\cos x}{1 - \text{senx}} + \frac{\cos x}{1 + \cos x} = 2 \sec x$

Solución:

$$\frac{\cos x}{1 - \text{senx}} + \frac{\cos x}{1 + \text{senx}} = \frac{\cos x(1 + \text{senx}) + \cos x(1 - \text{senx})}{(1 - \text{senx})(1 + \text{senx})}$$

$$= \frac{\cos x + \text{senx} \cos x + \cos x - \text{senx} \cos x}{1 - \text{Sen}^2 x}$$

$$= \frac{2\text{cosx}}{\text{Cos}^2 x} = 2\frac{1}{\cos x} = 2 \sec x$$


Una compañía de seguridad está encargada de instalar las cámaras de video en un supermercado próximo a inaugurar. Debes colocar cada cámara en una pared a una altura de 3 metros de tal forma que enmarque todo el pasillo donde hay mercancía. Los anaqueles están dispuestos a una distancia de 1,5 metros de la pared en donde irá la cámara, y por un trecho de 10 metros. ¿Qué ángulo debe poder rotar la cámara?
θ
3 mts
1,5 mts
α
φ
G

Actividad

actividad extra-clase ◯ actividad en clase ◯

Desarrolla estos ejercicios en las hojas de notas.

1. $\cos4\,\alpha - \text{sen}4\,\alpha + 1 = 2\cos2\,\alpha$
2. $\sec4\,\alpha - \sec2\,\alpha = \text{tg}4\alpha - \text{tg}2\alpha$
3. $(\sec\alpha + \cos\alpha)(\sec\alpha - \cos\alpha) = \text{tg}2\,\alpha + \text{sen}2\,\alpha$
4. $\text{cotg}4\alpha + \text{cotg}2\,\alpha = \text{cosec}4\,\alpha + \text{cosec}2\,\alpha$
5. $\cos4\,\alpha - \text{sen}4\,\alpha - 2\cos2\,\alpha = -1$
6. $\text{sen}3\,\alpha\cos\alpha + \cos3\,\alpha\,\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha\cos\alpha$
7. $\dfrac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = 2\,\text{cosec}\alpha$
8. $\sqrt{\dfrac{\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}} = \text{sen}\,\alpha$
9. $\text{cotg}\alpha + \dfrac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \text{cosec}\alpha$
10. $\sqrt{(1-\text{sen}\alpha)(1+\text{sen}\alpha)} = \dfrac{1}{\sec\alpha}$

Escribe qué piensas acerca de la afirmación que plantea la frase.