A

¿Una razón trigonométrica es la comparación de los lados de un triángulo?

FUNCIONES Y GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

GEOMÉTRICO – MÉTRICO

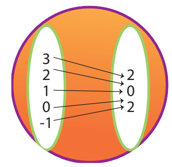
CONCEPTOS CLAVE

ZONA DE JUEGO:

Relaciona con una línea los términos (Conceptos claves) con la imagen según corresponda.

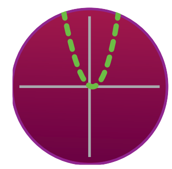
Función:

En matemáticas, se dice que una magnitud o cantidad es función de otra si el valor de la primera depende exclusivamente del valor de la segunda. Por ejemplo el área A de un círculo es función de su radio r: el valor del área es proporcional al cuadrado del radio, $A = \pi \cdot r^2$



Dominio:

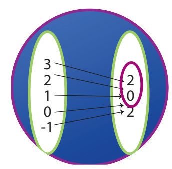
El dominio (conjunto de definición o conjunto de partida) de una función $f: X \rightarrow Y$ es el conjunto de existencia de ella misma, es decir, los valores para los cuales la función está definida. Es el conjunto de todos los objetos que puede transformar, se denota Dom_f o bien D_f.



Rango:

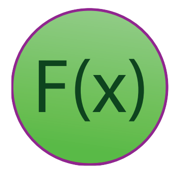
La imagen (conocida también como campo de valores o rango) de una función $f: X \rightarrow Y$ es el conjunto formado por todos los valores que puede llegar a tomar la función. Se puede denotar como $im(f)$, Im_f o bien I_f y formalmente está definida por:

$$Imf: = \{ y \in Y \mid \exists x \in X, f(x) = y \}$$



Simetría:

La simetría *(del griego σύν "con" y μέτρον "medida")* es un rasgo característico de formas geométricas, sistemas, ecuaciones y otros objetos materiales, o entidades abstractas, relacionada con su invariancia bajo ciertas transformaciones, movimientos o intercambios.

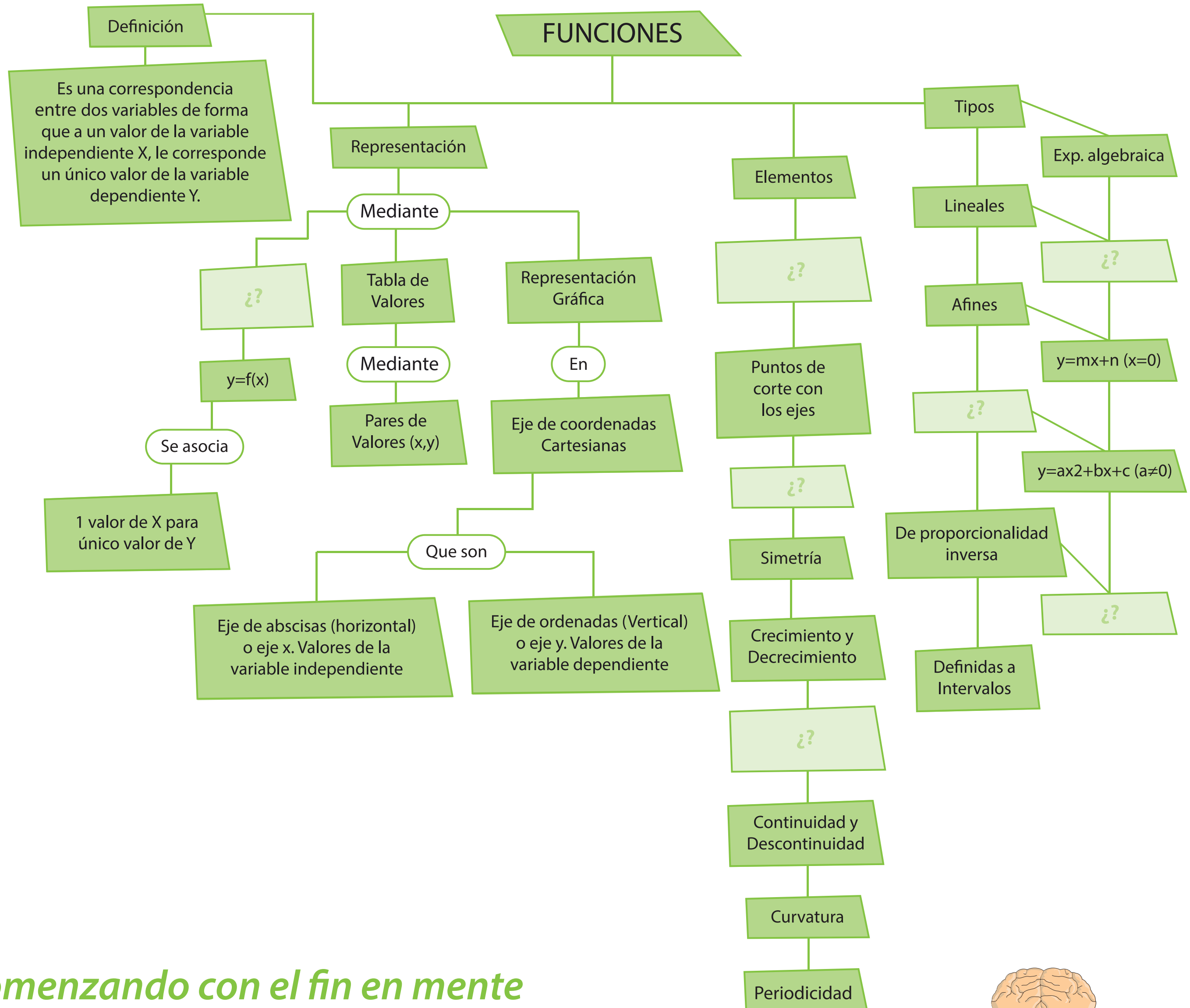


En este espacio responde la pregunta que se encuentra en la parte superior.

Mapa Conceptual

Completa el siguiente mapa conceptual con los términos que encontrarás a continuación:

- Expresión Algebraica
- Dominio y Recorrido
- Signo
- Máximos y Mínimos
- y=mx (m#0)
- y=k+x (k≠0)
- Cuadráticas



Comenzando con el fin en mente

¿Ya sabes lo que aprenderás en esta unidad académica?

Si aún no tienes claridad pregúntale a tu profesor.

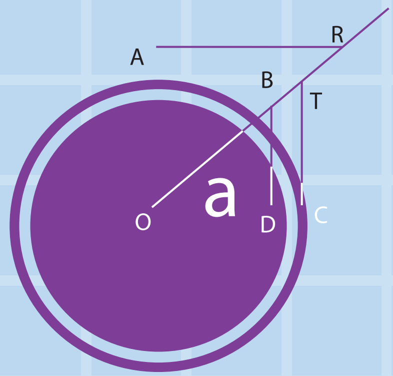
Funciones

UNIDAD PRODUCTIVA DE APRENDIZAJE N° 1

En matemáticas, las funciones trigonométricas son las funciones que se definen a fin de extender la definición de las razones trigonométricas a todos los números reales y complejos. Las funciones trigonométricas son de gran importancia en física, astronomía, cartografía, náutica, telecomunicaciones, la representación de fenómenos periódicos, y otras muchas aplicaciones.

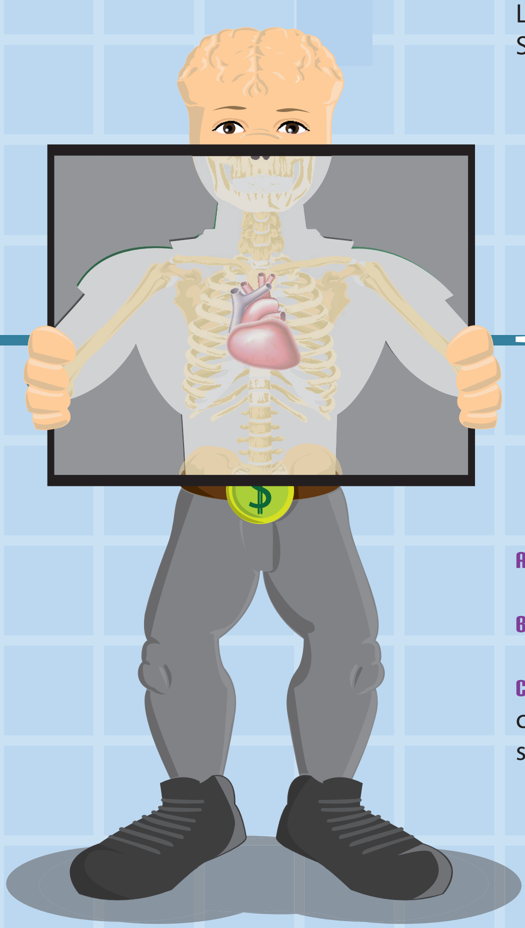
El círculo unitario

El círculo unitario, llamado también círculo trigonométrico, se construye en un sistema de ejes coordenados, de manera que su centro coincida con el origen de las coordenadas, y con un radio que vale una unidad de longitud, y trazando triángulos de condiciones dadas.

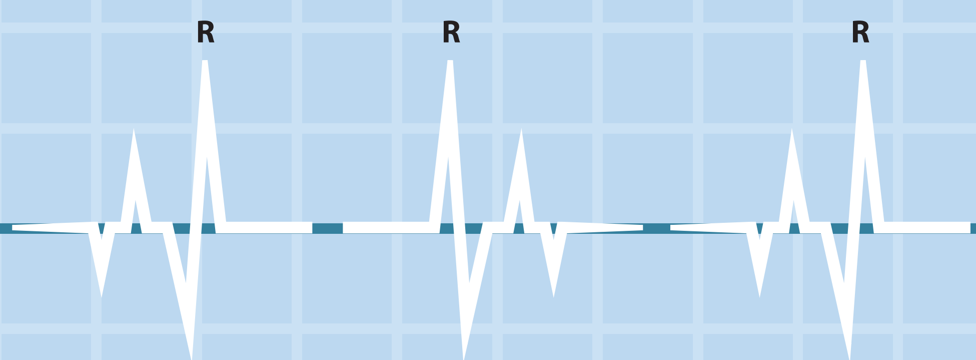


Tomamos un ángulo positivo cualquiera con vértice en el origen, tal que su lado inicial coincida con la parte positiva del eje **x**. Los puntos **C** y **B** son intersecciones de la circunferencia con los lados inicial y final, respectivamente, del ángulo. Desde **B** se traza BD perpendicular al eje x. En **C** se traza una tangente a la circunferencia que interseca el lado final del ángulo en **T**. En **A**, punto de intersección de la circunferencia con la parte positiva del eje y, se traza una tangente a la circunferencia que interseca el lado final del ángulo en el punto **R.**

Resuelve el siguiente problema introductorio:



La actividad del corazón humano se mide por medio de un electrocardiograma. Sobre el eje horizontal se mide el tiempo y sobre el eje vertical el voltaje.



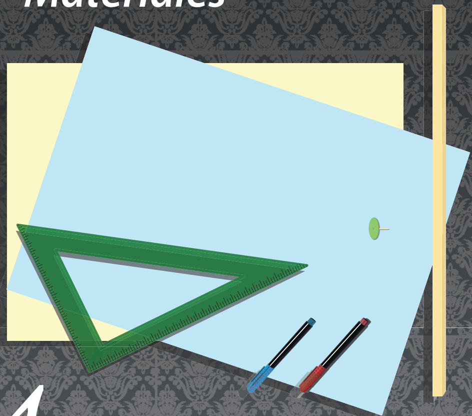
A. Identifica en la gráfica la parte de la curva que corresponde a un periodo.

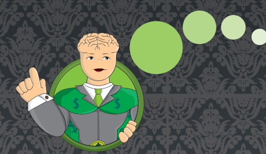
B. Si se sabe que **2,5 mm** corresponden a **1s**, ¿cuánto dura el periodo?

C. Si cada pico **R** de la gráfica de un E.C.G. se corresponde, aproximadamente, con una pulsación, ¿cuántas pulsaciones por minuto tiene el paciente al que se le tomó el electrocardiograma de la figura?

10-5

Materiales





- 2 Pliegos de cartulina
- 1 Palo de Balso
- Marcadores de diferentes colores
- Un Chinche
- Una regla
- Una escuadra
- Un transportador

En esta actividad aprenderemos a realizar de manera gráfica las funciones Seno y Coseno en el plano cartesiano; para ello debes seguir los siguientes pasos:

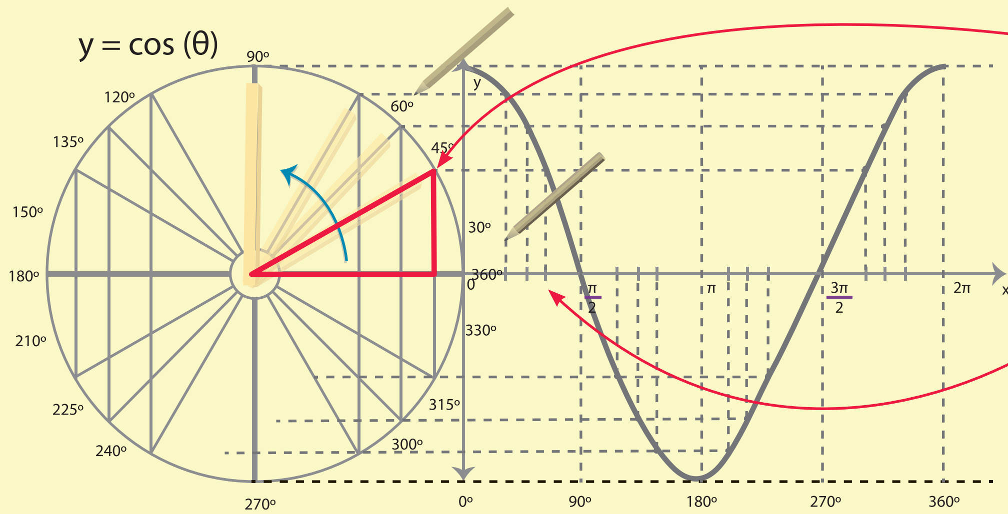
1

Tomaremos uno de los pliegos para hacer la función ***seno*** y el otro para hacer la función *coseno*. Primero realizaremos una circunferencia de aproximados **20 cm.** Necesitarás un transportador para señalar en la circunferencia los grados para hacer la gráfica. Para este ejemplo lo hemos dividido entre 30º y 15º de separación como se muestra en el gráfico. Luego sobre la circunferencia se adherirá el palo de balso con el chinche. Este palo de balso cumplirá la función de un transportador gigante, lo que nos permitirá calcular el valor de la *hipotenusa* y los catetos para realizar la gráfica a una escala mayor.

2

Luego traza sobre la cartulina al costado derecho de la circunferencia un plano cartesiano donde el eje *Y* comience en el borde de la misma. Señala en el eje *X* los grados que dan vuelta a la circunferencia: 90º, 180º, 270º y 360º y en la parte superior su equivalencia en radianes: $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ y 2π.

Nota: Para este ejercicio supondremos que el radio del círculo es igual a 1 tal que: ***r = 1.***

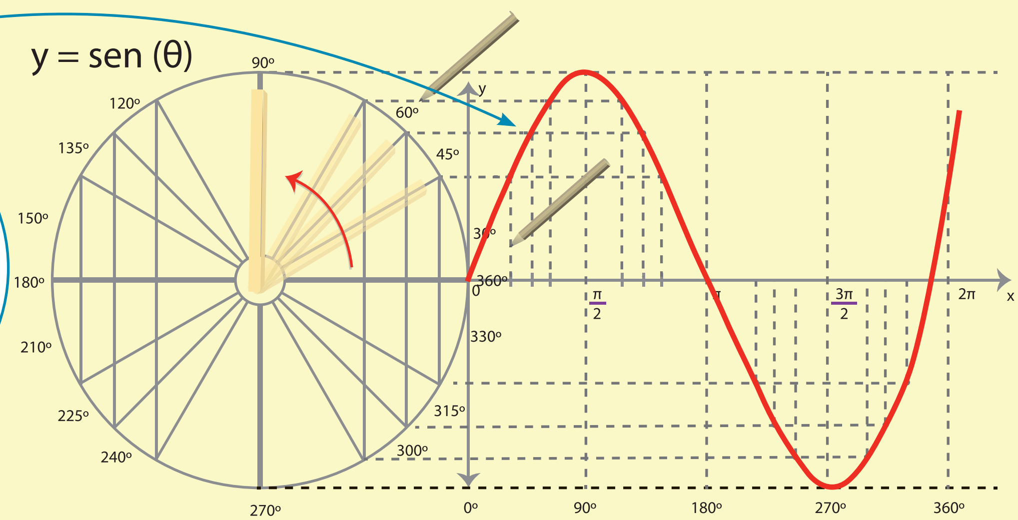


3

Para trazar las líneas deberás realizar el cálculo de los catetos y las hipotenusas colocando el palo de balso sobre el ángulo señalado formando el triángulo. Cuando tengas el resultado señálalo en el eje *X* del plano cartesiano.

4

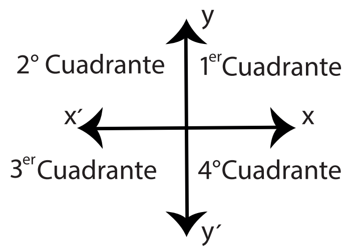
Finalmente cuando hayas hecho el cálculo en todos los ángulos señalados en la circunferencia, traza una línea curva uniendo los puntos en donde se encuentran los resultados que señalaste en el plano cartesiano.



Signo de las funciones

Una vez analizado y comprendidas las razones trigonométricas, es necesario que conozcan lo siguiente:

Signo de las funciones trigonométricas en los cuadrantes:



	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Identificación de las funciones en el círculo unitario

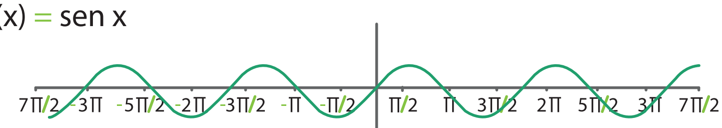
Los triángulos rectángulos **BOD**, **COT** y **AOR** son semejantes por tener dos ángulos y el lado correspondiente iguales.

Aplicando las definiciones de las funciones: Seno, Coseno, Tangente y Cotangente; y como **OC = OB = OA = 1**, éstas quedan representadas mediante líneas en la figura anterior.

En el triángulo BOD	$\text{sen}\, a = \frac{BD}{OB} = \frac{BD}{1} = BD$
	$\cos a = \frac{OD}{OB} = \frac{OD}{1} = OD$
En el triángulo COT	$\text{tag}\, a = \frac{CT}{OC} = \frac{CT}{1} = CT$
En el triángulo AOR	$\cot a = \frac{AR}{OA} = \frac{AR}{1} = AR$

Función seno

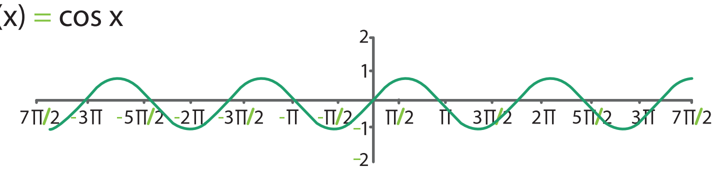
f(x) = sen x



Dominio: $\mathbb{R}$
Recorrido: $[-1, 1]$
Período: 2Π rad
Continuidad: Continua en $\forall X \in \mathbb{R}$
Creciente en: $...U(-\pi/2), \pi/2)\ U\ (3\pi/2), \ 5\pi/2)\ U...$
Decreciente en: $...U(\pi/2), 3\pi/2)\ U\ (5\pi/2, 7\pi/2)\ U...$
Máximos: $(\pi/2 + 2\pi K, 1)$
Mínimos: $(3\pi/2 + 2\pi K, -1)\ K \in \mathbb{Z}$
Impar: $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$
Cortes con el eje OX: $X = \{0 + \pi K\}$

Función coseno

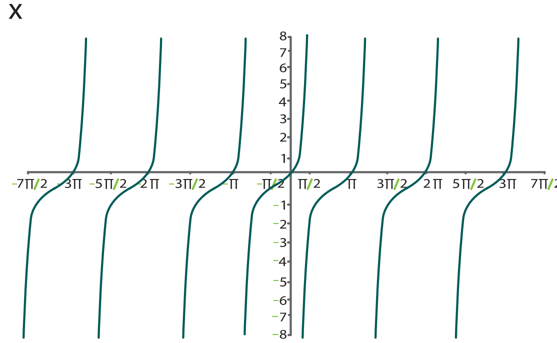
f(x) = cos x



Dominio: $\mathbb{R}$
Recorrido: [−1, 1]
Período: 2Π rad
Continuidad: Continua en $\forall X \in \mathbb{R}$
Creciente en: $...U(-\pi\ 0)U(\pi, 2\pi)\ U...$
Decreciente en: $...U(0, \pi)U(2\pi, 3\pi)\ U...$
Máximos: $(2\pi K, 1)\ K \in \mathbb{Z}$
Mínimos: $(\pi(2K+1), -1)\ K \in \mathbb{Z}$
Par: cos(−x) = cos x
Cortes con el eje OX: $X = \{\pi/2 + K\}$

Función tangente

f(x) = tg x



Dominio: $\mathbb{R}\ \{(2K+1)\pi 2, K \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{..., -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, ...\}$
Recorrido: $\mathbb{R}$
Continuidad: Continua en $\forall X \in \mathbb{R} - \{(\pi/2 + \pi K)\}$
Período: Π rad
Creciente en: $\mathbb{R}$
Máximos: ***No tiene.***
Mínimos: ***No tiene.***
Impar: ***tg(−x) = −tg x***
Cortes con el eje OX: $X = \{0 + \pi K\}$

Actividad

actividad extra-clase ◯ actividad en clase ◯

Desarrolla estos ejercicios en las hojas de notas.

1. ¿Puede el seno de un ángulo ser igual a 0,469, a 2,3521? Justifica tus afirmaciones.

2. ¿Puede el coseno de un ángulo ser igual a – 0,9044, a – 2,35? Justifica tus afirmaciones?

3. En cuáles intervalos, la función coseno es decreciente

4. En cuáles intervalos, la función tangente es creciente.

5. Por qué la tan de 90º no existe

6. Encuentra el valor de cada una de las siguientes expresiones.

   A. Cos (- 120º) C. sen (- 65º) E. sen 10
   B. tan (450º) D. tan 240º

7. Para cada caso muestra en un dibujo y encuentra la medida, en grados o en radianes de tres ángulos coterminales con cada uno de, los ángulos dados.

   A. 30º C. $\frac{\pi}{2}$ rad D. -120º
   B. $\frac{\pi}{4}$ rad

8. Si σ es un ángulo en posición normal t tan σ es un número negativo, ¿en qué cuadrantes puede estar σ?

9. Responde:

   A) Da ejemplo de dos ángulos de menos de ***2π rad*** para los cuales la tangente es negativa.
   B) Da ejemplo de dos ángulos de más de 360º para los cuales la tangente es negativa.

Justifica tus respuestas.

10. Ubica en posición normal los ángulos y halla los valores de las funciones que se indican.

   A) sen (-90º) B) cos 360º C) tan 540º D) sec (-45º)

Énfasis finanzas

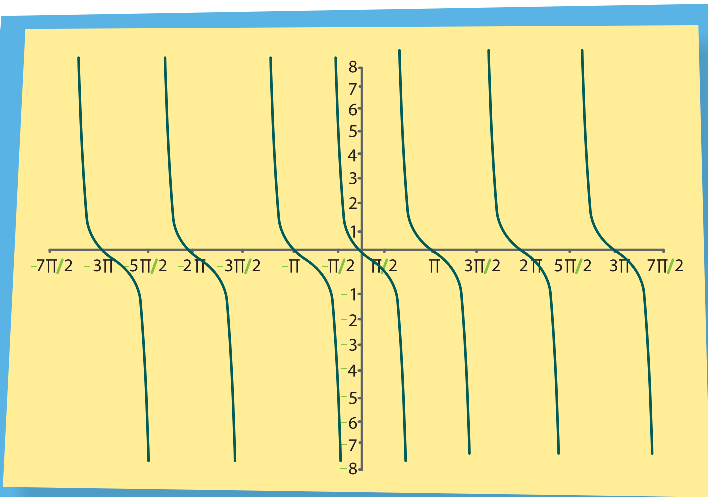
HAY GENTE **TAN POBRE** EN EL MUNDO QUE **LO ÚNICO QUE TIENEN** ES DINERO.

Robert kiyosaki

F $)[8&5$)7 3 6/*# 5=$'3)

Funciones inversas

UNIDAD PRODUCTIVA DE APRENDIZAJE N° 2



Función cotangente

f(x) = cotg x

Dominio: $\mathbb{R}\{K\pi, K \in \mathbb{Z}\} = \{..., -\pi, 0, \pi, ...\}$

Recorrido: $\mathbb{R}$

Continuidad: Continua en $X \in \mathbb{R} - \{\pi K, K \in \mathbb{Z}\}$

Período: π rad

Decreciente en: $\mathbb{R}$

Máximos: No tiene.

Mínimos: No tiene.

Impar: $\text{cotg}(-x) = -\text{cotg } x$

Cortes con el eje OX: $X = \{\pi/2 + K\}$

Función secante

f(x) = sec x

Dominio: $\mathbb{R}\{(2K+1)\pi/2, K \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{..., -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, ...\}$

Recorrido: $(-\infty, -1]\ [1, \infty)$

Período: 2π rad

Continuidad: Continua en $\forall X \in \mathbb{R} - \{(\pi/2 + \pi K)\}$

Creciente en: $...U(0, \pi/2) U (\pi/2, \pi) U...$

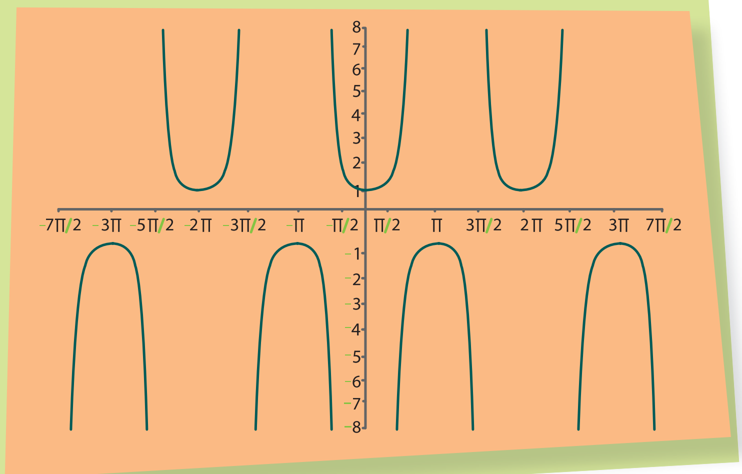
Decreciente en: $...U(\pi, 3\pi/2) U (3\pi/2, 2\pi) U...$

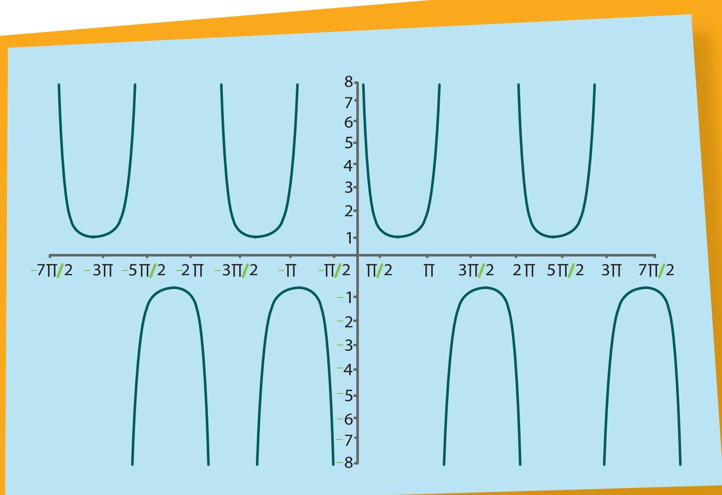
Máximos: $(2\pi K, -1)\ K \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $(\pi(2K+1), -1)\ K \in \mathbb{Z}$

Par: $\sec(-x) = \sec x$

Cortes con el eje OX: No corta





Función cosecante

f(x) = cosec x

Dominio: $\mathbb{R} - \{K\pi, K \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{..., -\pi, 0, \pi, ...\}$

Recorrido: $(-\infty, -1]\ [1, \infty)$

Período: 2π rad

Continuidad: Continua en $X \in \mathbb{R} - \{\pi K, K \in \mathbb{Z}\}$

Creciente en: $...U(\pi/2, \pi) U (\pi, 3\pi/2) U...$

Decreciente en: $...U(0, \pi/2) U (3\pi/2, 2\pi) U...$

Máximos: $(3\pi/2 + 2\pi K, -1)\ K \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $(\pi/2 + 2\pi K, 1)\ K \in \mathbb{Z}$

Impar: $\text{cosec}(-x) = -\text{cosec } x$

Cortes con el eje OX: No corta

Eratóstenes fue un matemático, astrónomo y geógrafo griego, de origen cirenaico. Eratóstenes era hijo de Aglaos. Estudió en Alejandría y durante algún tiempo en Atenas. Este hombre descubrió durante algunos de sus viajes entre Alejandría y la antigua ciudad de Asuán (SIena) una manera de saber el diámetro de la tierra. En este ejercicio realizaremos su experimento pero a escala de 1 cm a 22.5 cm.

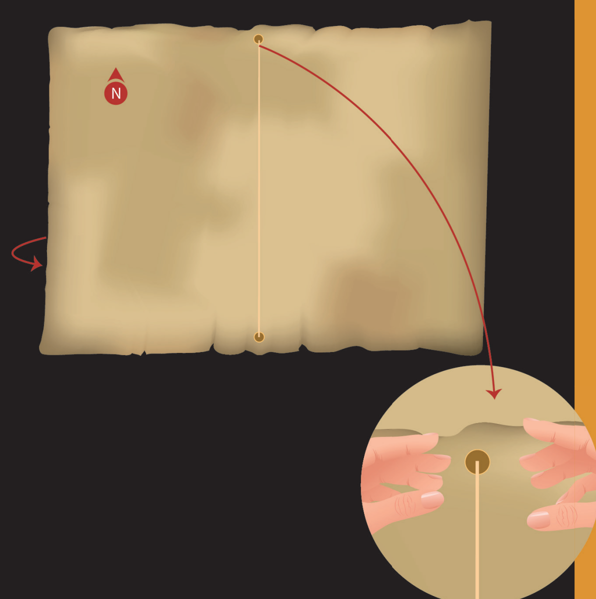
1 Primero pegamos el mapa de la región sobre el cuarto de cartulina.

2 Luego en el mapa pegamos los dos palitos de madera en los puntos donde ubicamos las dos ciudades, uno en cada ciudad. Estos simulan dos obeliscos de 180 metros.

3 Ahora buscamos un foco de luz (bombilla o linterna) y trataremos de simular el reflejo de la luz del sol de manera que en en el obelisco de Siena (Asuán) no se refleje ninguna sombra. Esto se puede hacer tirando de la cuerda amarrada a la parte trasera de la cartulina simulando la curvatura de la tierra.

Materiales

- Un mapa a escala donde se encuentran representadas la ciudades de Asuán y Alejandría.
- Dos palitos de madera de 8 cm.
- Un cuarto de cartulina. Realiza dos perforaciones al respaldo de la cartulina en el sentido de norte a sur del mapa. Luego amarra en los agujeros y en la parte trasera de la cartulina un hilo, cuerda o cordón.



Responde:

¿Por qué en Siena no se refleja sombra mientras que en Alejandría si?

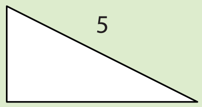
¿Cómo medirías el diámetro de La Tierra teniendo en cuenta los datos aproximados?

Investiga como logró Eratóstenes medir el diámetro de La Tierra.

¿Cómo aplicamos este experimento en la Trigonometría?

Ejemplo:

Dado el siguiente Triángulo, encontrar todas las Funciones Trigonométricas en cada caso que se requiera, o las que hacen falta.



a) $\text{Cos } A = \frac{4}{5}$

1) Primero encontraremos el valor de la ecuación que nos hace falta, en éste caso, ya que sabemos que la función de coseno relaciona lado adyacente sobre hipotenusa, ya conocemos dichos valores, nos faltaría encontrar el lado opuesto:

Utilizaremos el Teorema de Pitágoras:
$c^2 = a^2 + b^2$
Sustituimos valores:
$(5)^2 = (4)^2 + b^2$
$25 = 16 + b^2$
$25 - 16 = b^2$
$9 = b^2$
$\sqrt{9} = 3$

Obtenemos los cuadros de cada valor. Pasamos a restar el 16, ya que es cantidad positiva. Restamos los valores y pasamos el cuadrado como raíz. Tenemos como raíz cuadrada de 9 que es 3.

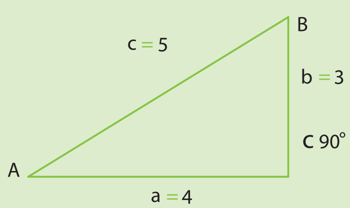
2) Ahora conociendo el valor que nos hacía falta (b), empezaremos a encontrar cada una de las funciones que hacen falta:

$\text{Sen } A = \frac{3}{5}$; $\text{Cos } A = \frac{4}{5}$; $\text{Tan } A = \frac{3}{4}$; $\text{Cot } A = \frac{4}{3}$

$\text{Sec } A = \frac{5}{4}$; $\text{Csc } A = \frac{5}{3}$; $\text{Sen } B = \frac{4}{5}$; $\text{Cos } B = \frac{3}{5}$

$\text{Tan } B = \frac{4}{3}$; $\text{Cot } B = \frac{3}{4}$; $\text{Sec } B = \frac{5}{3}$; $\text{Csc } B = \frac{5}{4}$

3) Teniendo todas la funciones procedemos a graficar:



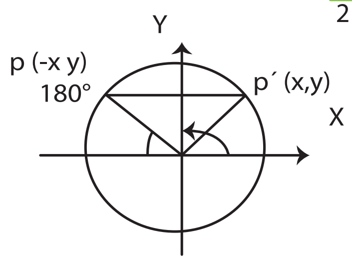
Reducción al primer cuadrante:

En esta sección hallaremos el valor de las funciones trigonométricas de un ángulo ubicado en cualquiera, de los cuatro cuadrantes del círculo gonio métrico.

Durante el proceso anterior de graficación de las funciones trigonométricas, observamos que el valor de ellas, para ciertos ángulos diferentes, es el mismo; excepto, quizás, en el signo. Por ejemplo sen 45º = sen 135º, tan 60º = tan 210º, cos = cos , etc. Este hecho nos permitirá expresar el valor de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, en función de un ángulo situado en el primer cuadrante.

Ángulos en el segundo cuadrante

$\frac{\pi}{2} < a\pi$



El ángulo *a* corta a la circunferencia en el punto P de coordenadas (- x, y); proyectemos P al punto P` de coordenadas ( x , y) simétrico a P en relación con el eje . Recordemos que las definiciones de las relaciones trigonométricas se hacen en función de las coordenadas de los puntos de corte del lado terminal del ángulo y la circunferencia; en este caso P y P`.

Las coordenadas del ángulo α tienen la misma longitud que las coordenadas del ángulo β = 180º - α; por lo tanto, las relaciones trigonométricas de los dos ángulos son iguales; excepto. Quizás, en el signo para cada relación en particular. Luego:

Sen *a* = sen (180º - *a*)
cot *a* = cot (180º -)

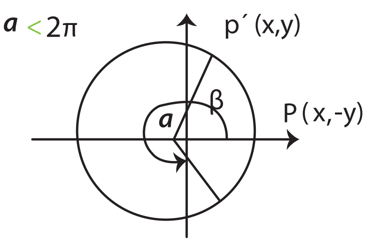
Ángulos en el tercer cuadrante

El ángulo α corta la circunferencia en el punto P de coordenadas (- x, - y); proyectamos P al punto P` de coordenadas (x , y) simétrico a P en relación con el origen. Las coordenadas del ángulo α tienen la misma longitud que las coordenadas del ángulo β α + 1890º, que son congruentes por ser opuestos por el vértice. Por lo tanto, las relaciones trigonométricas de los dos ángulos son iguales, excepto, quizás, es el signo para cada relación en particular. Luego:

Sen = sen (- 180º)
cot *a*= cot (*a* - 180º)

Ángulos en el cuarto cuadrante

$3\frac{\pi}{2} < a < 2\pi$



El ángulo α corta a la circunferencia en el punto P de coordenadas (x, - y); proyectamos P al punto P` de coordenadas (x, y) simétrico a P en relación con el eje.

Las coordenadas del ángulo α tienen la misma longitud que las coordenadas del ángulo β = - 360α que son congruentes. Por lo tanto, las relaciones trigonométricas de los dos ángulos son iguales; excepto, quizás, en el signo para cada relación en particular. Luego

Sen = - sen (360º - *a*)
cot *a* = cot (- 180º)

Actividad

actividad extra-clase ◯ actividad en clase ◯

Desarrolla estos ejercicios en las hojas de notas.

1. Determina el cuadrante al cual pertenece el ángulo α, si existe α, con las condiciones que se expresan en cada uno de los numerales:

   A. cos α 0 y tan α 0
   B. sec α 0 y cos α 0
   C. tan α 0 y cosc α 0
   D. sen α 0 y sec α 0
   E. cot α no existe, sec α = - 1 y cosc α no existe

2. En cada caso halla el ángulo de referencia y dibuja los dos, posición normal, en el mismo plano cartesiano. Encuentra los valores para las funciones trigonométricas de cada uno.

   A. 840º B. 240º C. -315º D. $\frac{3\pi}{4}$ rad

   E. $\frac{7\pi}{6}$ rad F. $\frac{29\pi}{6}$ rad

3. Usa la calculadora para hallar el valor de seno y coseno de δ = 36º. Determina en los cuadrantes segundo, tercero y cuarto, ángulos que tengan a δ como ángulo de referencia y encuentra el valor para el seno, el coseno y la tangente de cada uno.

4. Utiliza el dato que se da para hallar el valor de la función evaluada en el ángulo que se indica.

   A. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = ?$

   B. tan (-75º) = - 3,73; tan (285º) = ?

5. Dibuja en cada uno de los cuadrantes segundo, tercero, cuarto un ángulo tal que el ángulo θ de la figura sea su ángulo de referencia y escribe, para cada uno, una igualdad que muestre la relación entre los dos.