A

¿Un triángulo oblicuángulo se puede resolver a partir del teorema de Pitágoras?

SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

GEOMÉTRICO - MÉTRICO

CONCEPTOS CLAVE

ZONA DE JUEGO:

Relaciona con una línea los términos (Conceptos claves) con la imagen según corresponda.

Triángulo oblicuángulo:

Se define oblicuángulo al triángulo que no posee ángulos rectos.

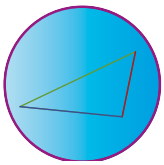
TRIÁNGULO ACUTÁNGULO: Un triángulo es acutángulo cuando sus tres ángulos interiores son ángulos agudos (menores de 90^0).

TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO: Un triángulo obtusángulo posee un ángulo obtuso (mayor de 90^0) y dos ángulos agudos (menores de 90^0).

Ángulo:

Parte del plano comprendida entre dos semirectas que tienen el mismo punto de origen o vértice.

ÁNGULO AGUDO: Ángulo menor de 90^0
ÁNGULO RECTO: Ángulo cuya medida es igual a 90^0
ÁNGULO OBTUSO: Ángulo mayor de 900 y menor de 180^0



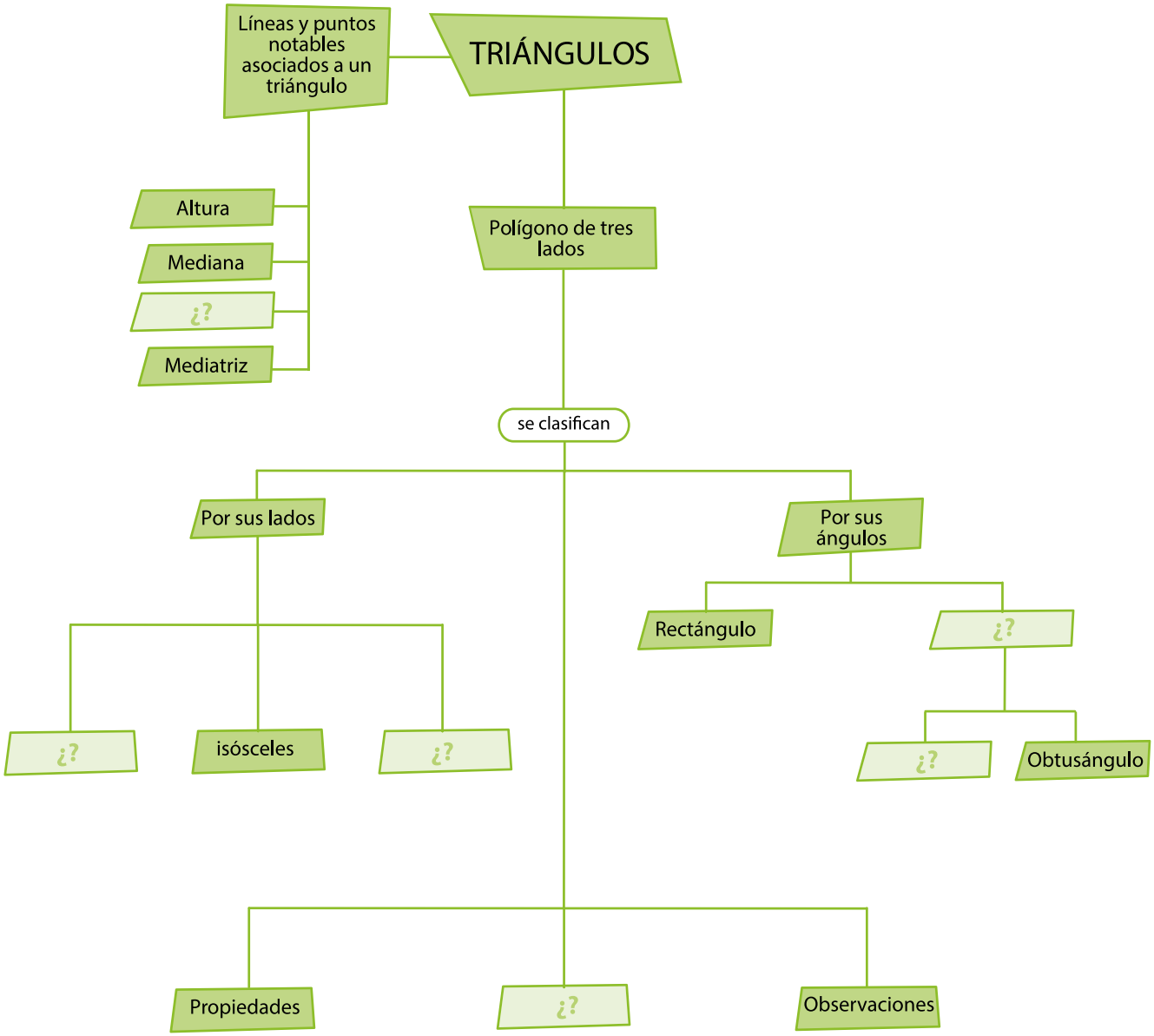
En este espacio responde la pregunta que se encuentra en la parte superior.

B

Mapa conceptual

Completa el siguiente mapa conceptual con los términos que encontrarás a continuación:

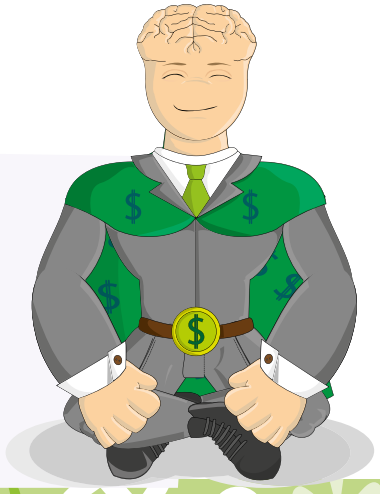
- equilátero
- escaleno
- Bisectriz
- Oblicuángulo
- Acutángulo
- Teoremas



Comenzando con el fin en mente

¿Ya sabes lo que aprenderás en esta unidad académica?

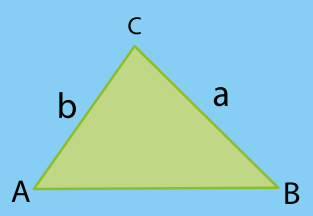
Si aún no tienes claridad pregúntale a tu profesor.

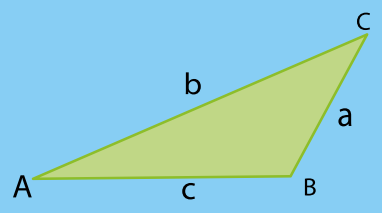


Triángulo oblicuángulo

UNIDAD PRODUCTIVA DE APRENDIZAJE N° 1

Un triángulo que no es rectángulo se le llama oblicuángulo (*). Los elementos de un triángulo oblicuángulo son los tres ángulos A, B y C y los tres lados respectivos, opuestos a los anteriores, a, b y c.





¡Fácil de recordar! El lado A es el opuesto del ángulo a; El lado B es el opuesto del ángulo b; El lado C es el opuesto del ángulo c.

Un problema de resolución de triángulos oblicuángulos consiste en hallar tres de sus elementos, lados o ángulos, cuando se conocen los otros tres (uno de los cuales ha de ser un lado).

(*) Oblicuángulo se contrapone a rectángulo, en sentido estricto. Pero cuando se habla de triángulos oblicuángulos no se pretende excluir al triángulo rectángulo en el estudio, que queda asumido como caso particular. No obstante cuando el triángulo es rectángulo, porque se dice expresamente que lo es, el problema se reduce, tiene un tratamiento particular y no se aplican las técnicas generales de resolución que vamos a ver seguidamente.

Se utilizan tres propiedades:

Suma de los ángulos de un triángulo	$A + B + C = 180^o$
Teorema del seno	$\frac{\text{Sen } A}{a} = \frac{\text{Sen } B}{b} = \frac{\text{Sen } C}{c}$
Teorema del coseno	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \text{Cos } A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \text{Cos } B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \text{Cos } C$

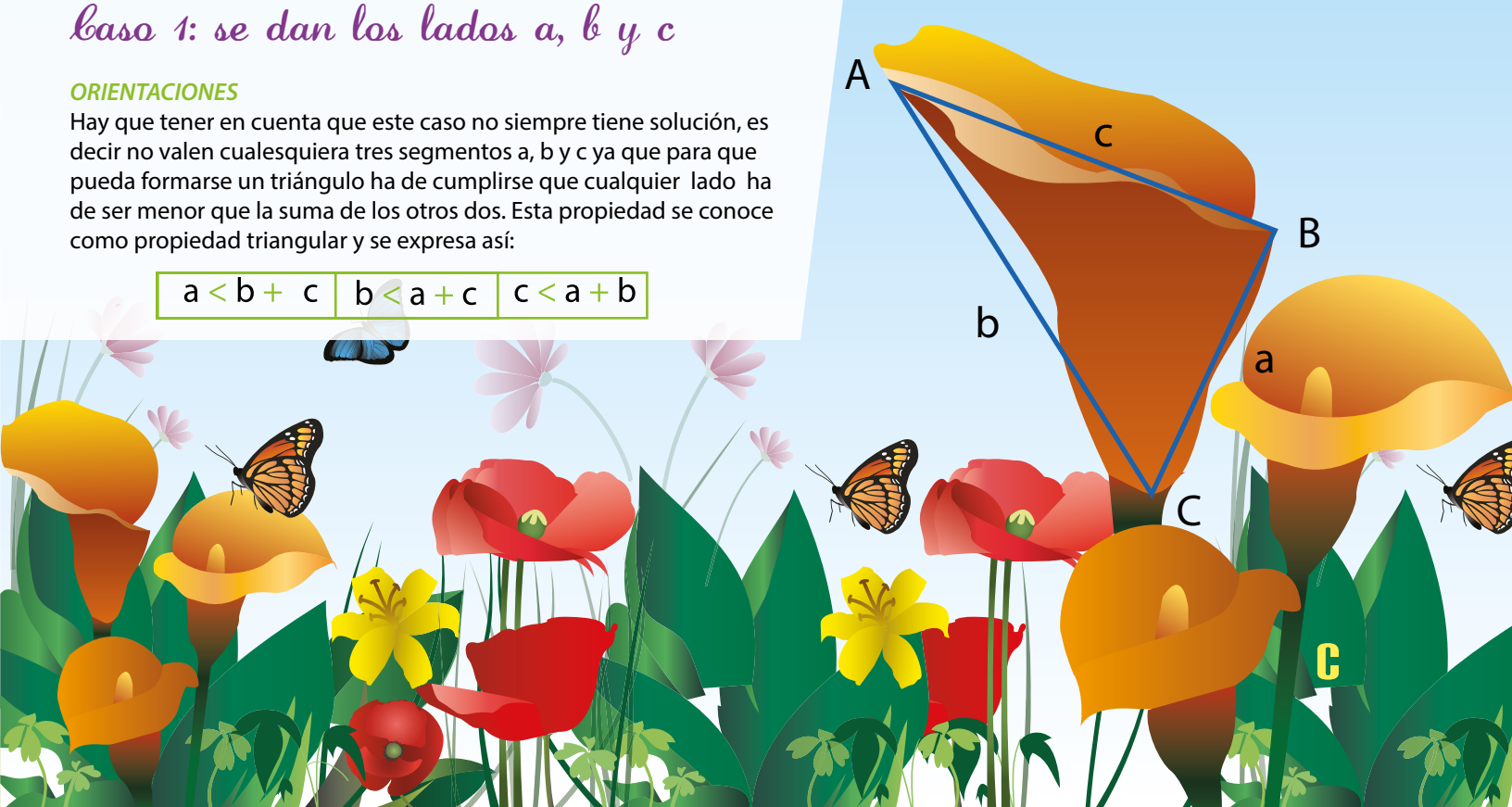
Caso	Datos Conocidos	Incógnitas
I	Los tres lados: a, b, c	Lo tres ángulos A, B, C
II	Un lado y los ángulos adyacentes: a, B, C	Dos lados y un ángulo: b, c, A
III	Dos lados y el ángulo formado: a, b, C	Un lado y dos ángulos: c, A, B
IV	Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos: a, b, A	Un lado y dos ángulos: c, B, C

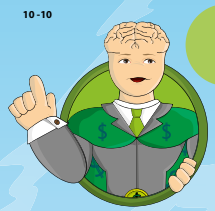
Caso 1: se dan los lados a, b y c

ORIENTACIONES

Hay que tener en cuenta que este caso no siempre tiene solución, es decir no valen cualesquiera tres segmentos a, b y c ya que para que pueda formarse un triángulo ha de cumplirse que cualquier lado ha de ser menor que la suma de los otros dos. Esta propiedad se conoce como propiedad triangular y se expresa así:

$a < b + c$	$b < a + c$	$c < a + b$





Tomás discute con Aralia cómo cruzar un río desde el punto indicado con A en el dibujo hasta el indicado con B, sabiendo que la velocidad de la corriente con dirección AC es de 3 km/h. Tomás sabe que finalmente la dirección de su velocidad en la trayectoria no resultará la misma dirección de la velocidad con la que nade.

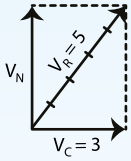
Él piensa que si nada en forma perpendicular, puede calcular a qué velocidad tiene que nadar para que la velocidad resultante sea de 5 km/h. Aralia le dice que no le conviene nadar perpendicularmente a la velocidad de la corriente, sino formando un ángulo de 60º con el borde del río y orientado hacia B, porque de ese modo, para la misma velocidad resultante, su velocidad de nado puede ser menor.

a. ¿Creen que Aralia tiene razón? ¿Por qué?

b. Dos alumnos encuentran diferentes procedimientos para resolver este problema. Analícenlos y justifiquen si les parecen o no correctos.

Alumno A:

Con ángulo de 90°



Para $V_{nado} \perp V_{corriente}$

$V_{resultante} = 5$ km/h

$V_{corriente} = 3$ km/h

$V_{nado}^2 = 5^2 - 3^2$ (Por Pitágoras)

$V_{nado} = 4$ km/h

Con ángulo de 60°

Por el teorema del seno

$\frac{\text{Sen } 120º}{V_R} - \frac{\text{Sen } x}{V_C} \Rightarrow \text{sen } x = \frac{v_c}{v_R} \text{ Sen } 120º$; sen x = 3/5 . $\sqrt{3}$ / 2

sen x = 0,51 ; x ≅ 30°

$\frac{\text{Sen } 120º}{V_R} - \frac{\text{Sen } y}{V_N} \Rightarrow V_N = V_R \cdot \frac{\text{Sen } 30º}{\text{Sen } 120º} \Rightarrow V_N = V_C$

Alumno B:

Con ángulo de 60° (Por el Teorema del Seno se determina el valor del ángulo)

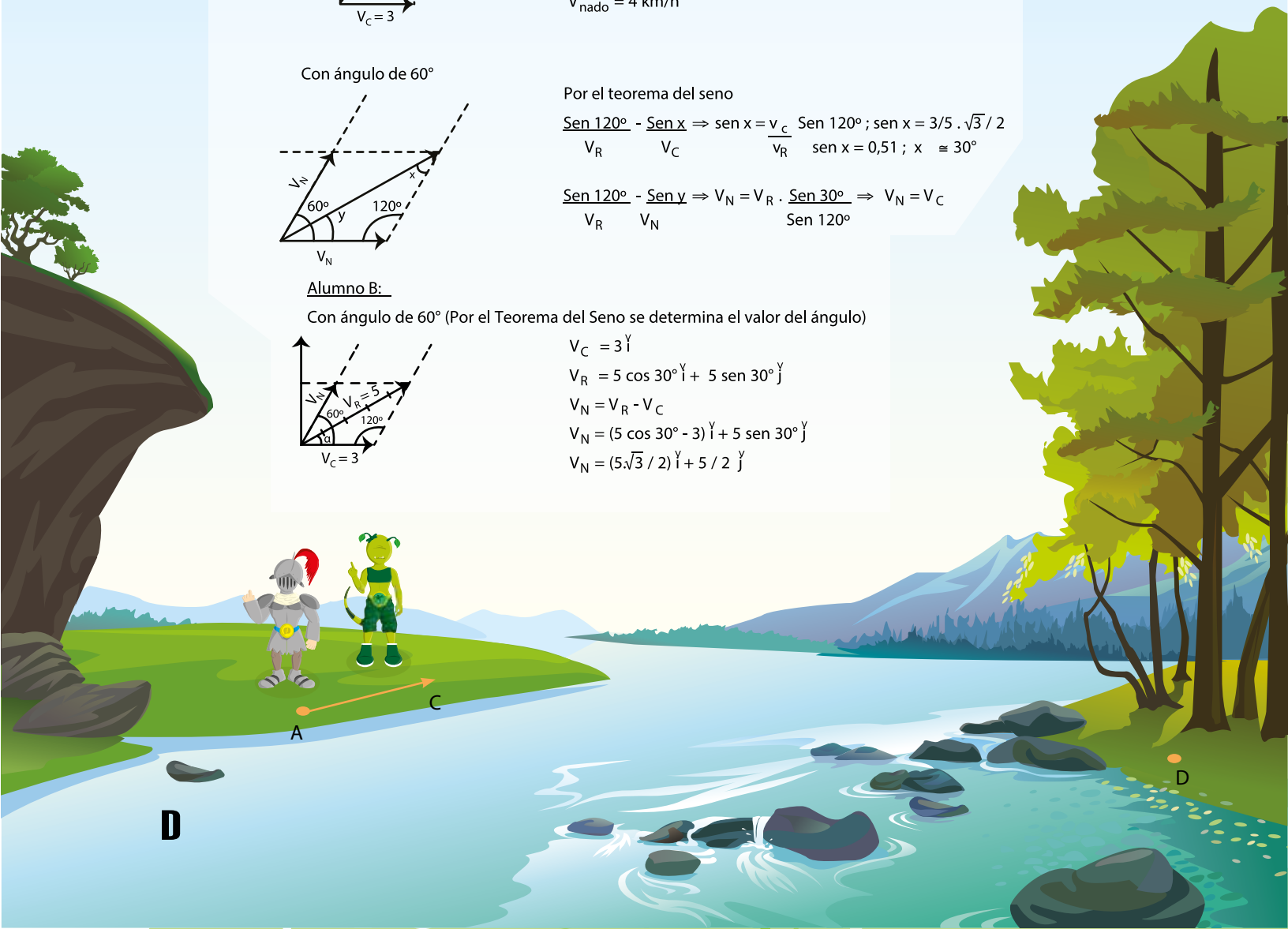
$V_C = 3\,\hat{i}$

$V_R = 5 \cos 30°\,\hat{i} + 5 \text{ sen } 30°\,\hat{j}$

$V_N = V_R - V_C$

$V_N = (5 \cos 30° - 3)\,\hat{i} + 5 \text{ sen } 30°\,\hat{j}$

$V_N = (5.\sqrt{3} / 2)\,\hat{i} + 5 / 2\,\hat{j}$



Caso 2: se da un lado y los ángulos adyacentes

ORIENTACIONES

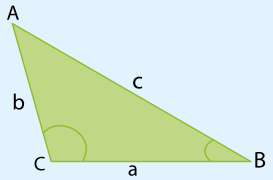
La única limitación es que los dos ángulos tienen que sumar menos de 180º (B + C < 180º) para que sea posible la construcción.
La solución trigonométrica se consigue aplicando el siguiente orden a las propiedades:

1º Suma de los ángulos B + C para determinar A
2º Teorema del Seno para determinar sucesivamente los lados b y c.

$$A = 180^\circ - B - C$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \qquad b = a \cdot \frac{\text{sen } B}{\text{sen } C}$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \qquad c = a \cdot \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}$$

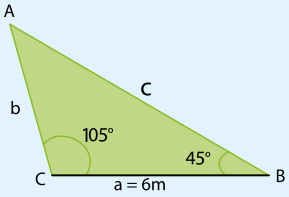


Ejemplo: De un triángulo sabemos que: a = 6 m, B = 45° y C = 105°. Calcula los restantes elementos.

$$A = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$$

$$\frac{6}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 45^\circ} \qquad b = 6 \cdot \frac{\text{sen } 45^\circ}{\text{sen } 30^\circ} = 6 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\frac{6}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 105^\circ} \qquad c = 6 \cdot \frac{\text{sen } 105^\circ}{\text{sen } 30^\circ} = 11.6 \text{ m}$$



Actividad

actividad extra-clase ◯ actividad en clase ◯

Desarrolla estos ejercicios en las hojas de notas.

1) Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50º, y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60º. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilómetros del pueblo A y a 4 del pueblo B, calcula la distancia entre los pueblos A y B.

2) Los flancos de un triángulo forman un ángulo de 80º con la base. Si el triángulo tiene 30 centímetros de base, calcula la longitud de sus lados.

3) Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Berto hay 25 metros, y entre Berto y Camilo, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20º. Calcula la distancia entre Alberto y Camilo.

4) Una valla cuyo perímetro tiene forma triangular mide 20 metros en su lado mayor, 6 metros en otro y 60º en el ángulo que forman entre ambos. Calcula cuánto mide el perímetro de la valla.

"SI QUIERES HACER ALGO **Y CREES** QUE LO PUEDES HACER, **LO MÁS PROBABLE** ES QUE LO REALICES".

Robert kiyosaki

Caso 3: se dan dos lados y el ángulo que forman

Los lados conocidos a y b tienen el extremo común C.

Ahora se puede dar cualquier valor a los lados a y b. La única limitación la impone el ángulo C que forman (C < 180º).

Desde el punto de vista constructivo, este caso no requiere más que unir los extremos libres de los lados a y b. Inicialmente la escena presenta los valores a = 6, b=8 y C=100º.

La solución trigonométrica se consigue aplicando en el mismo orden las siguientes propiedades:

1º Teorema del coseno para calcular el lado c,

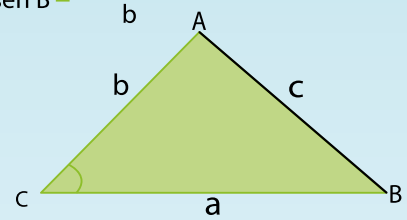
2º Teorema del seno para calcular el ángulo A

3º Una vez conocidos A y C, la propiedad de la suma de los tres ángulos para calcular B.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cos C}$$

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \qquad \text{sen } B = \frac{c \cdot \text{sen } B}{b}$$

$$A = 180º - B - C$$



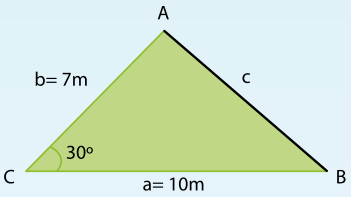
Ejemplo: De un triángulo sabemos que: a = 10 m, b = 7 m y C = 30°. Calcula los restantes elementos.

$$c = \sqrt{10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cos 30º} = 5.27 \text{ m}$$

$$\frac{7}{\text{sen } B} = \frac{5.27}{\text{sen } 30º} \qquad \text{sen } B = 0.664 \longrightarrow \begin{cases} B = 41º\ 37'\ 52'' \\ B = 138º\ 22'\ 2'' \end{cases}$$

B = 41º 37′ 52″ porque al ser a > b el ángulo obtuso será A

A = 180º - 30º - 41º 37′ 52″ = 108º 22′ 8″



NOTA 1: El extremo A contiene un punto de control que se desplaza sobre la recta que une los vértices A y B.

Cada vez que se cambien los parámetros b y C, que alteran la posición del punto A, habrá que corregir la posición del control y llevarlo a la nueva posición de A para poder realizar el nuevo trazado del lado c.

Caso 4: se dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

ORIENTACIONES: Este caso es el más complejo ya que se pueden dar tres situaciones:

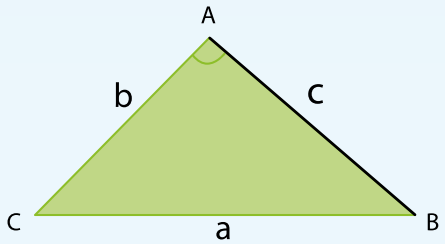
- No existe triángulo
- Existe un triángulo
- Existen dos triángulos.

Suponemos conocidos los lados a y b y el ángulo A opuesto al lado a, La solución trigonométrica se consigue aplicando las siguientes propiedades en el mismo orden:

1º Teorema del seno para calcular el ángulo B
2º La propiedad de la suma de los tres ángulos para calcular C
3º Nuevamente el Teorema del seno para calcular el lado c.

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \qquad \text{Si:}$$

sen B > 1. No hay solución
sen B = 1 Triángulo rectángulo
sen B < 1. Una o dos soluciones



El siguiente cuadro resume los posibles casos que pueden darse y que el alumno podrá comprobar en las actividades que se proponen más adelante. No es necesario memorizarlo, simplemente hágase una idea de las posibilidades que se tiene:

h = b.sen A > a		ninguna solución	
h = b.sen A = a	A < 90º	una solución	
	A >= 90º	ninguna solución	
h = b.sen A < a	a > b	una solución	
	a = b	A < 90º	una solución
		A >= 90º	ninguna solución
	a < b	A < 90º	dos soluciones
		A >= 90º	ninguna solución

NOTA 1: *El lado a es un segmento unido por un extremo al lado b y que podemos girar libremente pinchando el extremo B del mismo y arrastrando ya representa este un control.*

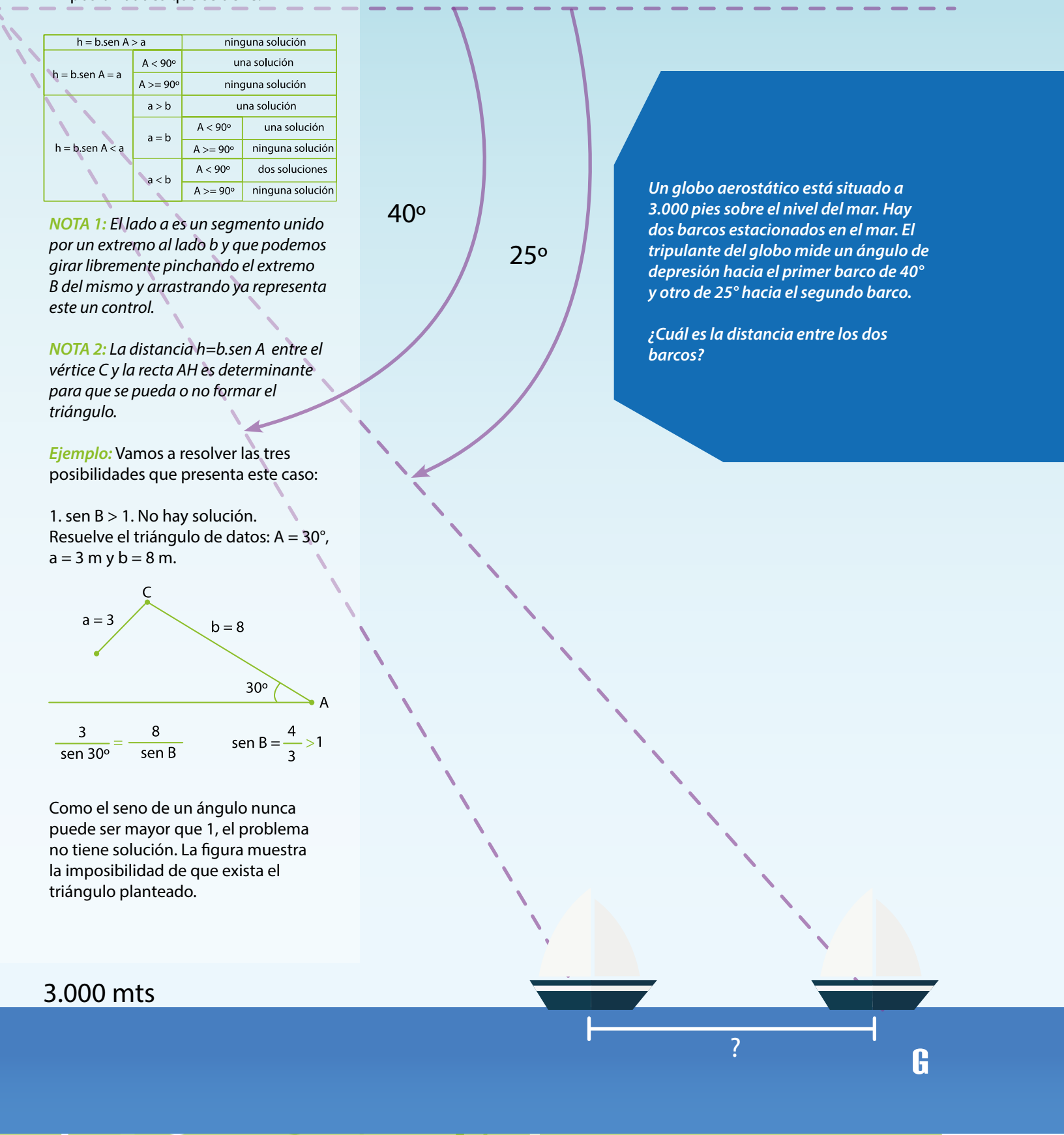
NOTA 2: *La distancia h=b.sen A entre el vértice C y la recta AH es determinante para que se pueda o no formar el triángulo.*

Ejemplo: Vamos a resolver las tres posibilidades que presenta este caso:

1. sen B > 1. No hay solución.
Resuelve el triángulo de datos: A = 30°, a = 3 m y b = 8 m.

$$\frac{3}{\text{sen } 30^o} = \frac{8}{\text{sen B}} \qquad \text{sen B} = \frac{4}{3} > 1$$

Como el seno de un ángulo nunca puede ser mayor que 1, el problema no tiene solución. La figura muestra la imposibilidad de que exista el triángulo planteado.



Un globo aerostático está situado a 3.000 pies sobre el nivel del mar. Hay dos barcos estacionados en el mar. El tripulante del globo mide un ángulo de depresión hacia el primer barco de 40° y otro de 25° hacia el segundo barco.

¿Cuál es la distancia entre los dos barcos?

Actividad

actividad extra-clase ◯ actividad en clase ◯

Desarrolla estos ejercicios en las hojas de notas.

1) Con los valores iniciales a = 6, b = 8 y C =100. Construye el triángulo dibujando el segmento b que une el extremo A con el extremo B. Para ello 'pincha' con el botón izquierdo del ratón sobre A y arrastra hasta B. Dibuja el triángulo en tu cuaderno partiendo de los datos que te dan.

2) Aplica las fórmulas trigonométricas para solucionar el triángulo y comprueba la solución dada por el programa. Escribe los cálculos que haces en los apuntes.

3) Pulsa el botón Inicio y cambia el ángulo C a 180º. Desplaza el control a la posición del punto A. Dibuja el segmento AB. Lee e interpreta la solución sobre la pizarra. ¿Porqué los ángulos A y B miden 0º? ¿ Se cumple la propiedad triangular entre los lados a, b y c ?

4) Comprobar que inicialmente a = 8, b = 5, A = 60º. Girar el extremo B hasta incidir con la recta AH y compruebe que existe un único punto de corte y por lo tanto existe un triángulo como solución.

5) Trata de sobreponer a en h ¿qué relación hay entre a y h? Trata de sobreponer a en b ¿qué relación hay entre a y b? Consultar después la tabla orientativa anterior y verificar las respuestas que hayas dado.

6) Fíjate en la longitud que tiene h y disminuye
la longitud del lado a hasta hacer que h > a. Desplaza el control de B, para que la longitud de a se adapte a la nueva situación. ¿Se forma triángulo? Consulta la tabla orientativa anterior y verifica la respuesta.

TRABJANDO LOS VALORES

Diagrama de fuerzas

En el ***Diagrama de Fuerzas*** tenemos dos tipos de fuerzas, ***las impulsoras*** que nos ayudan a lograr el objetivo, y ***las negativas*** también llamadas ***restrictivas*** que nos alejan del objetivo. Escribe en la casilla de fuerzas impulsoras cinco cosas que fortalecen el ***valor*** propuesto y en la casilla de fuerzas restrictivas escribe cinco cosas que nos alejan del mismo valor.

Fuerzas Restrictivas

Dejar que el resto de mis compañeros hagan el trabajo.

Fuerzas Impulsoras

Dar más de lo que esperan acerca de mi trabajo.