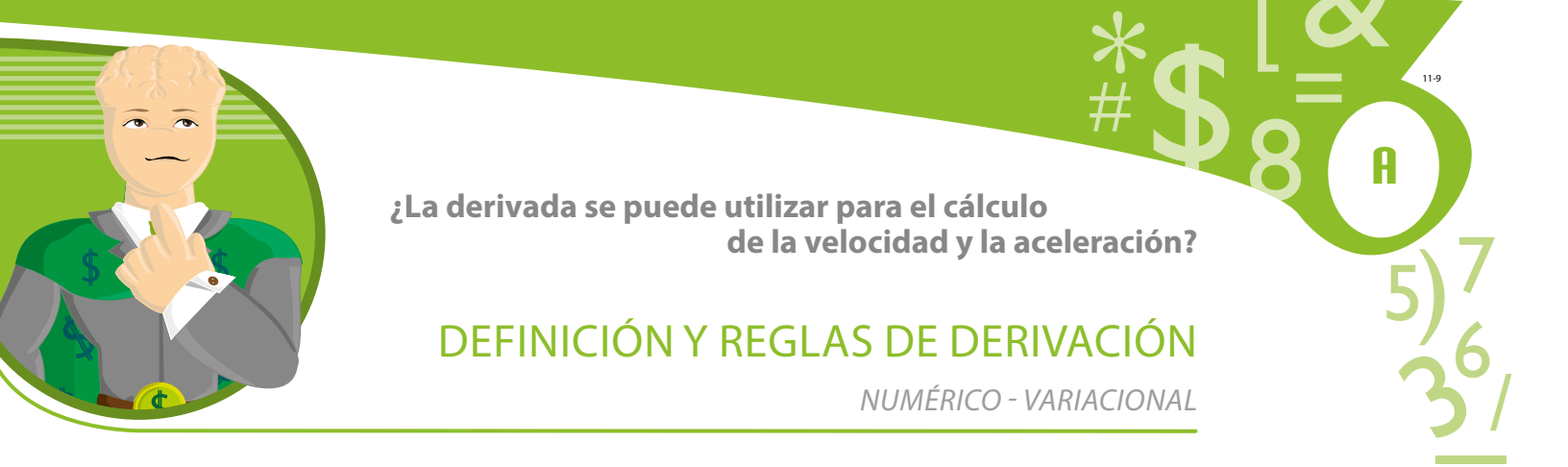




¿La derivada se puede utilizar para el cálculo de la velocidad y la aceleración?

DEFINICIÓN Y REGLAS DE DERIVACIÓN

NUMÉRICO - VARIACIONAL

CONCEPTOS CLAVE

ZONA DE JUEGO:

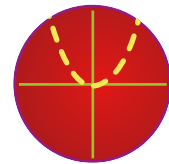
Relaciona con una línea los términos (Conceptos claves) con la imagen según corresponda.

Derivada:

Es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de la variable independiente.

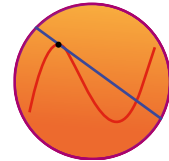
$$\Delta x = x_f - x_i$$

$$\Delta y = y_f - y_i$$



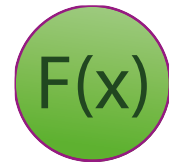
Función:

Relación de correspondencia con base en una regla, de forma única, que se determina biyectiva.



Concavidad:

La concavidad de una curva o superficie es una apertura en oposición al vértice.



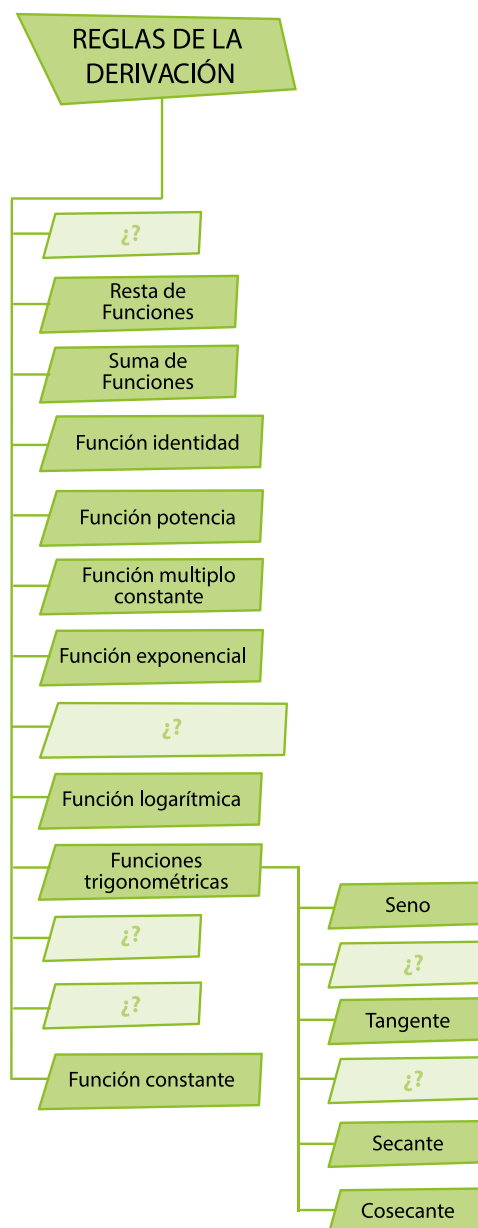
En este espacio responde la pregunta que se encuentra en la parte superior.



Mapa Conceptual

Completa el siguiente mapa conceptual con los términos que encontrarás a continuación:

- Producto
- Función exponencial natural
- Cociente
- Coseno
- Radical
- Cotangente



Comenzando con el fin en mente

¿Ya sabes lo que aprenderás en esta unidad académica?

Si aún no tienes claridad pregúntale a tu profesor.



Derivada

UNIDAD PRODUCTIVA DE APRENDIZAJE N° 1

11-9

La derivada de una función f es la función denotada por y prima (y'), o por f prima (f') es la derivada de y con respecto a x , la derivada de la función f con respecto a x . La primera derivada de la función f con respecto a x se denota como:

$$y' ; f' ; \frac{dy}{dx} ; \frac{df}{dx} ; D_x f(x) ; D_x y$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Porqué es la tasa media de variación de y con respecto a x en el intervalo $[x; x+h]$; y en el límite de la razón promedio cuando $h \rightarrow 0$.

y cuyo dominio consta de todos los valores de x en los que existe tal límite.

Ejemplo:

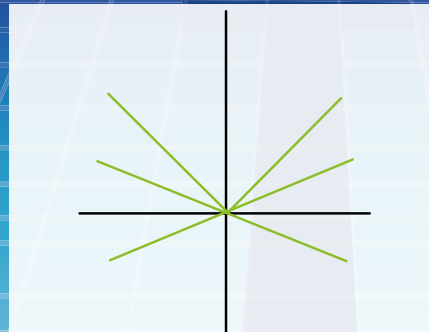
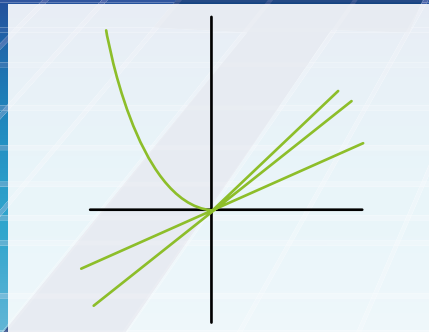
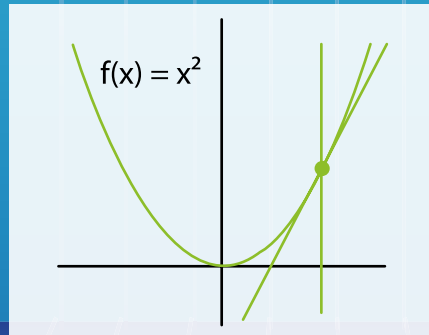
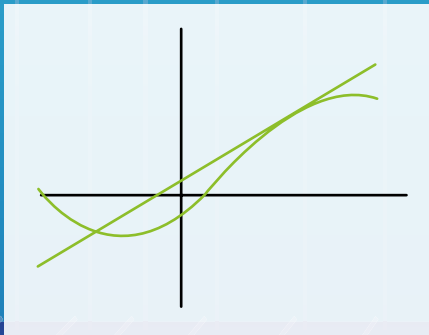
Calcula $f'(2)$, utilizando la definición de derivada, siendo: $f(x) = 2x^2 + 5x$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + 5(2+h) - 18}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(4+4h+h^2) + 10 + 5h - 18}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8+8h+2h^2+10+5h-18}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2+13h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2h+13)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h+13) = 13 \end{aligned}$$

Interpretación geométrica

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la pendiente de la secante que une un punto (x, y) cualquiera de la curva, con otro $Q(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Cuando $\Delta x \rightarrow 0$; P es fijo y Q se mueve.



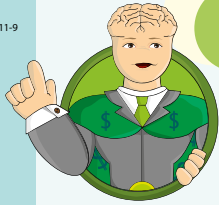
Resuelve el siguiente problema introductorio:

Una piscina tiene forma cuadrada con dimensiones de 1,5 m x 1,5 m y de fondo 2,5 m.

a. ¿Cuál es la tasa media de aumento del volumen del agua si el nivel ha subido de 0,5 m a 1,8 m?

b. ¿Cuál es la tasa instantánea de aumento del volumen del agua en el instante en que éste tiene una altura de 1 m?





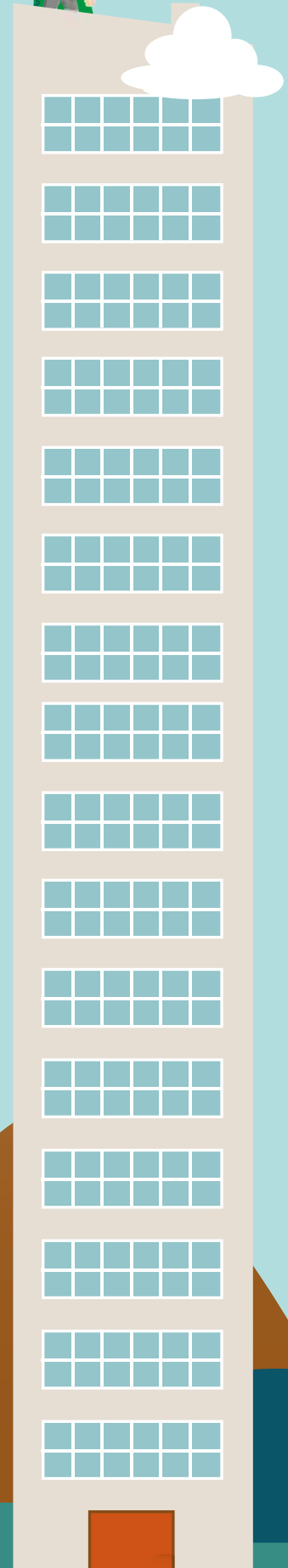
Se dejó caer un objeto desde la terraza de un edificio de más de cien pisos, y se registraron los datos que muestra la tabla (están redondeados):

x	$f(x)$
Tiempo en el aire (s)	Distancia recorrida (m)
0	0
1	5
2	20
3	45
4	80

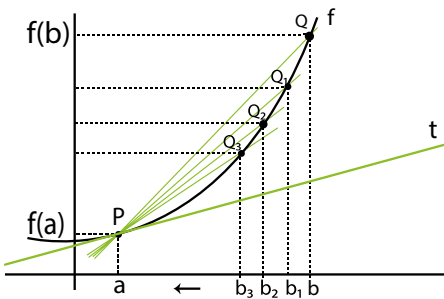
- 1) Selecciona los pares de valores y crea una lista de puntos;
- 2) Determina la fórmula de la función que contiene esos puntos y escríbela en el campo de entrada, llamando x a la variable independiente. Pinta el gráfico de $f(x)$ y considera solo $x \geq 0$.
- 3) Escribe la fórmula de la función derivada de $f(x)$. Pinten el gráfico de $g(x)$.
- 4) Responde las siguientes preguntas:
 - a) ¿Qué representa la función $g(x)$ en la situación planteada?
 - b) ¿Cuánto vale la pendiente de la recta del gráfico $g(x)$? ¿Qué significado tiene ese valor?
- 5) Marca un punto A en el gráfico de $f(x)$, traza la tangente a la curva por ese punto y muestra el valor de la pendiente (m).
- 7) Ubica el punto A haciéndolo coincidir con P1, P2, P3, P4 y P5; observa cuánto vale m en cada caso y completa, una tabla como la que se muestra en el ejemplo a continuación:

Punto	Valor de la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en ese punto (m)	$g(x)$
$P_0 = (0, 0)$		$g(0) =$
$P_1 = (1, 5)$		$g(1) =$
$P_2 = (2, 20)$		
$P_3 =$		
$P_4 =$		

- 8) Redacta las conclusiones que saques al observar la tabla.



La recta tangente mide la pendiente de la función en ese punto determinado.

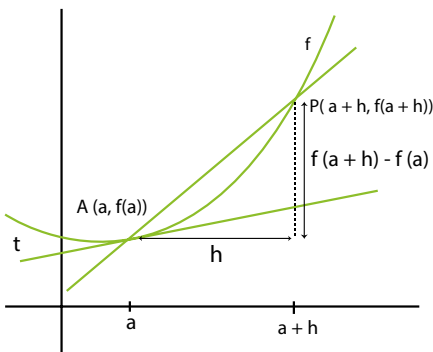


Para poder hallar la ecuación de esa recta tangente en el punto de coordenadas $A(a, f(a))$, si la escribimos en forma punto-pendiente:

$$y - f(a) = m(x - a) = \Delta y = m \Delta x$$

necesitamos saber el valor de la pendiente m .

Para ello, si tenemos en cuenta que la recta tangente es la posición límite de las secantes, entonces su pendiente será el límite de las pendientes de las secantes, con lo que:



Interpretación física

El cálculo de derivadas o cálculo diferencial surge en el siglo XVII al tratar de resolver una serie de problemas que aparecían en las Matemáticas y en la Física, como son (entre otros):

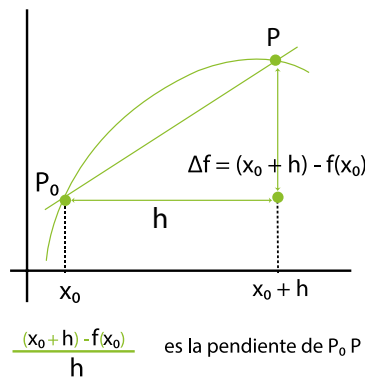
- La definición de velocidad
- La determinación de la recta tangente a una curva en un punto dado.
- El cálculo de los valores máximos y mínimos que alcanza una función.

En estos y otros problemas similares de lo que se trata, en el fondo, es de estudiar, de medir y cuantificar, la variación de un determinado fenómeno, la rapidez con que se produce un cambio.

La tasa de variación media (TVM), o cociente incremental, nos da una primera idea de la rapidez con que varía un fenómeno en un intervalo determinado. Se define como el cociente:

$$\begin{aligned} TVM [a, b] &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{aligned}$$

es decir, nos dice cuanto variaría la función por cada unidad de variación de la variable independiente dentro del intervalo considerado suponiendo que esa variación fuese uniforme en todo el intervalo.



La tasa de variación media coincide, evidentemente, con el valor de la pendiente de la recta que une los puntos de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

El valor obtenido al calcular la T.V.M. de una función en un intervalo determinado no quiere decir que en todo el intervalo se haya mantenido ese porcentaje de variación; de hecho, no suele ser así. Además, lo que interesa normalmente es saber lo que ocurre en un punto determinado: la velocidad en un instante dado, la trayectoria que seguirá un disco al ser lanzado, el punto en que un proyectil alcanza su máxima altura, etc.

Por tanto, el problema es estudiar la variación instantánea (T.V.I.) de la función en un punto determinado x_0 . Para ello lo que haremos será estudiar su variación en intervalos $[x_0, x]$ (o $[x, x_0]$) cada vez más pequeños haciendo que x se aproxime a x_0 . En el momento en que x coincida con x_0 la T.V.M. se convertirá en la tasa de variación instantánea que es lo que realmente nos interesa.

Pero el problema es que en el cociente que define la T.V.M. al llegar a coincidir x con x_0 el denominador valdría 0. Por ello se define la tasa de variación instantánea como:

$$\begin{aligned} TVI(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Y este límite es lo que hemos llamado derivada de la función f en el punto x_0 .

Por tanto la derivada puede interpretarse también como la tasa de variación instantánea, es decir, como la razón de cambio instantánea de una función.

Ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Ecuación de la recta normal.

Como vimos en la interpretación geométrica de la derivada, ésta es la pendiente de la recta tangente a la función (realmente a la gráfica de la función) en el punto de coordenadas $P(a, f(a))$, por lo que la ecuación de la recta tangente será:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

NOTA: Para calcular la ecuación de la recta tangente utilizamos la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

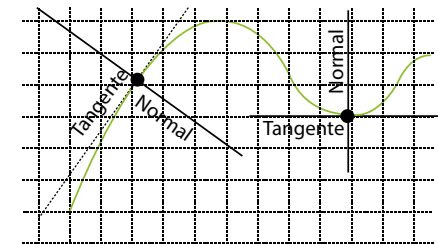
La normal a una curva en un punto $P(a, f(a))$ es la perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Si la pendiente de la tangente es $m_t = f'(a)$, la pendiente de la normal será $m_n = -\frac{1}{f'(a)}$

(ya que el producto de ambas debía ser -1) y la ecuación de la recta normal nos viene dada por:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

Si $f'(a) = 0$, la recta tangente será horizontal y de ecuación $y = f(a)$. En ese caso la recta normal es vertical y de ecuación $x = a$.



Ejemplos: Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva dada por $f(x) = x^3$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Calculamos la derivada de la función dada en el punto que nos indican. Aplicando la propia definición tendremos:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2^3 + 3 \cdot 2^2 h + 3 \cdot 2 h^2 + h^3) - 2^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot 2^2 h + 3 \cdot 2 h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 h + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 h + h^2) = 3 \cdot 2^2 = 12 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$f'(2) = 12 \Rightarrow m_t = f'(2) = 12 \quad y \quad m_N = -\frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{12}$$

Una vez que hemos obtenido las pendientes de las rectas tangente y normal a la curva, podemos escribir sus ecuaciones, utilizando la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente:

Si tenemos en cuenta que el punto de tangencia tiene por coordenadas $(2, f(2)) = (2, 8)$, las ecuaciones de las rectas pedidas son:

Ecuación de la recta tangente:

$$y - 8 = 12 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 2x - 16$$

Ecuación de la recta normal:

$$y - 8 = -\frac{1}{12} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{12} \cdot x + \frac{49}{6}$$



actividad extra-clase ☐ actividad en clase ☐

Desarrolla estos ejercicios en las hojas de notas.

1) Encuentra las derivadas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 5 + 6x^2 + 7x$ R/ $f'(x) = 12x + 7$

b. $f(x) = 3 \left(3 - \frac{1}{2}x^2 \right)^2$

c. $f(x) = 5(2x - 4)^{\frac{4}{3}} (5x + 6)^{\frac{2}{3}}$

d. $f'(1)$ si $f(x) = \frac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}$

e. $f'(3)$ si $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x + 5}$ $f'(3) = \frac{25}{\sqrt{47}} = 3.6466$

2) Para las siguientes funciones halla la derivada en el punto que se indica.

a) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$; (8,1) b) $(x - y^2)(x + xy) = 4$; (2,1) c) $x^3 + y^3 = 2xy$; (1,1)

3) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en los puntos (4,3) y (-3,4).

HAY GENTE TAN POBRE EN EL MUNDO QUE LO ÚNICO QUE TIENEN ES DINERO.

Robert Kiyosaki

Reglas de derivación

UNIDAD PRODUCTIVA DE APRENDIZAJE N° 2

Las fórmulas o reglas de derivación son las siguientes:

1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE:

Una función constante es siempre derivable y su derivada vale siempre 0.

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

2. DERIVADA DE LA FUNCIÓN IDENTIDAD:

La función identidad es siempre derivable y su derivada vale siempre 1.

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

3. DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL DE EXPONENTE NATURAL:

La función potencial de exponente natural es siempre derivable y su derivada vale.

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

4. DERIVADA DE UNA SUMA DE FUNCIONES:

Si dos funciones f y g son derivables la función suma $f + g$ también es derivable y su derivada es la suma de las derivadas.

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

5. DERIVADA DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES:

Si dos funciones f y g son derivables la función producto $f \cdot g$ también es derivable y su derivada vale.

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Como caso particular tenemos que si una función f es derivable el producto de un número k por la función f también es derivable y su derivada vale.

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$$

En el caso de tres funciones sería:

$$(f \cdot g \cdot h)'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

y así sucesivamente.

6. DERIVADA DE UN COCIENTE DE FUNCIONES:

Si dos funciones f y g son derivables, en los puntos en que la segunda sea distinta de cero la función cociente también es derivable y su derivada vale.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Como caso particular tenemos que si una función g es derivable la función $\frac{1}{g}$ es derivable en todos los puntos en que g sea distinta de cero y su derivada vale.

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$$

7. DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL DE EXPONENTE ENTERO NEGATIVO:

La función potencial de exponente entero negativo es siempre derivable y su derivada vale.

$$f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$$

8. DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA:

La función logarítmica $f(x) = \ln(x)$, que sólo está definida para los números positivos, es siempre derivable y su derivada vale.

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

9. DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL DE EXPONENTE REAL:

La función potencial de exponente real $f(x) = x^a$ es siempre derivable y su derivada vale.

$$f(x) = x^a \Rightarrow f'(x) = a \cdot x^{a-1}$$

Como caso particular tenemos la derivada de la raíz n -ésima (que se deduciría escribiéndola como potencia de exponente fraccionario y derivando):

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Y para la raíz cuadrada:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

10. DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE a :

La función logarítmica de base un número real a (positivo y distinto de 1), que está definida sólo para números positivos, es siempre derivable y su derivada vale.

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

11. DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE a :

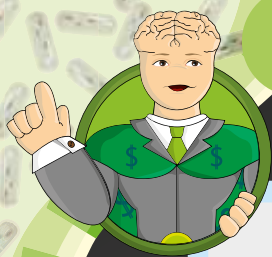
La función exponencial de base un número real a (positivo y distinto de 1) es siempre derivable y su derivada vale.

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

Como caso particular podemos considerar la función exponencial de base el número e , que suele llamarse simplemente función exponencial, cuya derivada es

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Ésta es la única función que coincide con su derivada.



Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de un millón de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 10^6 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 10^6 \cdot e^{t-2} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Realiza los siguientes ejercicios:

- verifica que la población es función continua del tiempo;
- grafica la función y verifica el resultado del punto anterior;
- calcula la tasa de variación media de la población en los intervalos $[0,2]$ y $[0,4]$.
- calcula la tasa de variación instantánea en $t=4$.

Realiza en este espacio la gráfica:



12. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:

La función seno es siempre derivable y su derivada vale.

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

La función coseno es siempre derivable y su derivada vale.

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

La función tangente es derivable siempre que exista y su derivada vale.

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

13. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS:

$$\operatorname{Ctg} x = -\operatorname{Csc}^2 x = \left(\frac{-1}{\operatorname{Sen}^2 x} \right)^2$$

$$\operatorname{Sec} x = \operatorname{Sec} x (\operatorname{Tan} x)$$

$$\operatorname{Csc} x = -\operatorname{Csc} x (\operatorname{Ctg} x)$$

14. DERIVADA DE UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. REGLA DE LA CADENA:

Dadas dos funciones f y g , si la función f es derivable en un punto x y la función g es derivable en el punto $f(x)$, la función compuesta $g \circ f$ es derivable en el punto x y su derivada vale.

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

15. DERIVADA DE LA FUNCIÓN RECÍPROCA O INVERSA:

Si una función f es inyectiva y derivable, con derivada distinta de cero, la función recíproca o inversa f^{-1} también es derivable y su derivada vale.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

16. DERIVACIÓN LOGARÍTMICA:

Es un método que permite calcular fácilmente muchas derivadas y que consiste en tomar logaritmos neperianos en los dos miembros de la función y derivar a continuación.

Ejemplos:

$$y = x^{\sin x} \quad \frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sin x$$

$$\ln(y) = \ln(x^{\sin x}) \quad y' = \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sin x \right] \cdot y$$

$$\ln(y) = \sin x \cdot \ln x \quad y' = \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sin x \right] \cdot x^{\sin x}$$

17. DERIVACIÓN IMPLÍCITA:

Es un método que se emplea cuando resulta difícil escribir la función a derivar en la forma $y = f(x)$.

$$2x \cdot y^2 + 3y = 5$$

$$2y^2 + 2y \cdot y' \cdot 2x + 3y' = 0$$

$$y' = \frac{-2y^2}{4xy + 3}$$

18. REGLA DE LA CADENA DERIVADAS TRIGONOMÉTRICAS:

$$\operatorname{Sen} u(x): \operatorname{Cos} u(x) \cdot u'(x)$$

$$\operatorname{Cos} u(x): -\operatorname{Sen} u(x) \cdot u'(x)$$

$$\operatorname{Tan} u(x): \operatorname{Sec}^2 u(x) \cdot u'(x)$$

$$\operatorname{Ctan} u(x): -\operatorname{Csc}^2 u(x) \cdot u'(x)$$

$$\operatorname{Sec} u(x): \operatorname{Sec} u(x) \operatorname{Tan}^2 u \cdot u'(x)$$

$$\operatorname{Csc} u(x): -\operatorname{csc} u(x) \cdot \cot u(x) \cdot u'(x)$$

ANEXO: REGLAS DE DERIVACIÓN:

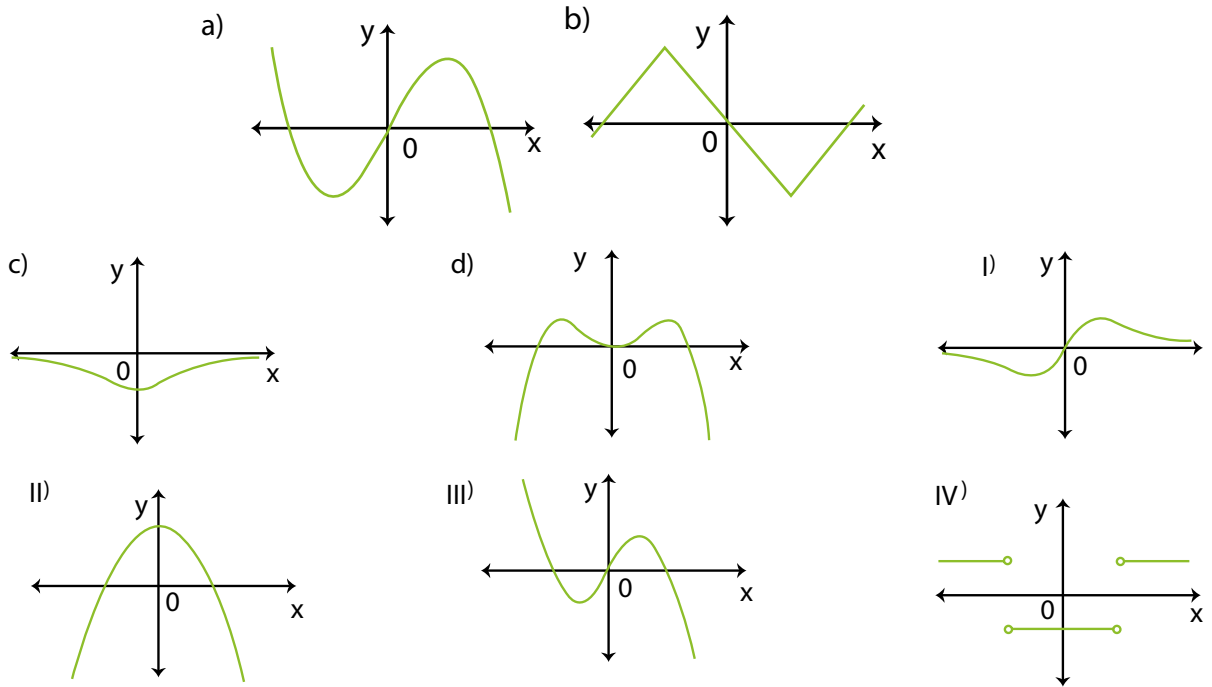
OPERACIONES	REGLA
SUMA Y DIFERENCIA	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
PRODUCTO	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
COCIENTE	$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
PRODUCTO POR UN N°	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
COMPOSICIÓN	$(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$



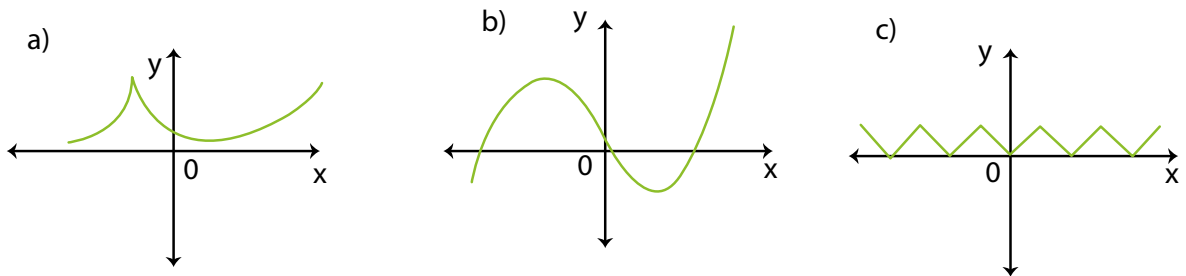
actividad extra-clase ☐ actividad en clase ☐

Desarrolla estos ejercicios en las hojas de notas.

- 1) Relaciona la gráfica de cada función dada en las figuras a)-d) con las gráficas de sus derivadas I-IV. Explica las razones de su elección.



- 2) Para cada una de las siguientes funciones, traza la gráfica de su derivada.



- 3) Determina la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 25x + 5$	b. $f(x) = (16x^2 + 5x + 8)^5$	c. $f(x) = \sin(3x^2 + 8)$
d. $f(x) = \frac{3x^4 + 15}{x^2}$	e. $f(x) = x^2 \sqrt{\cos x}$	f. $f(x) = \tan(\sin(\sqrt{x^2 + 1}))$
g. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 5x^2 + 1}}{\sqrt{x}}$	h. $f(x) = (3x + 5)\sqrt{x + 1} \cos(x^2)$	i. $f(x) = \frac{x^3 \sin x}{\tan x}$